Gestalten

der

Kurven vom vierten Grade,

deren Gleichungen

nur grade Potenzen der Coordinaten

enthalten.

Von

Carl Piper.

Eine an der philosophischen Facultät zu Rostock am 28. Februar 1871 gekrönte Preisschrift.

Rostock.

Stiller'sche Hofbuchhandlung.

(Hermann Schmidt.)

1871.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Dr. B. Möllmann

zu

Hannover

widmet diese Schrift in dankbarer Erinnerung

der Verfasser.

Inhalt.

§. 1. Wenn man die Kurve, deren Gleichung ist $a y^4 + b x^4 + c y^2 x^2 + d y^2 + e x^2 + f = o$, construiren will, so construire man erst den Kegelschnitt $a y^2 + b x^2 + c y x + d y + e x + f = o$. Ist dann $y = \beta$, $x = \alpha$ ein Punkt dieses Kegelschnittes, so sind $y = \sqrt{\beta}$,*) $x = \sqrt{\alpha}$; $y = -\sqrt{\beta}$, $x = \sqrt{\alpha}$; $y = \sqrt{\beta}$, $x = -\sqrt{\alpha}$; $y = -\sqrt{\beta}$, $x = -\sqrt{\alpha}$ sämmtlich Punkte der zu construirenden Kurve. Man kann also aus jedem Punkte des Kegelschnittes im 1. Quadranten vier Punkte der Kurve ableiten, also beliebig viele Punkte der Kurve construiren und diese durch einen freien Zug mit einander verbinden.

Wir theilen nun die in Rede stehenden Kurven in 3 Hauptabtheilungen, und zwar sollen in die 1. Hauptabtheilung diejenigen gehören, welche keinen, in die 2. die, welche vier, in die 3. die, welche acht unendliche Zweige haben. Man sieht, daß die Kurve in die 1., 2. oder 3. Hauptabtheilung gehört, je nachdem der Kugelschnitt im 1. Quadranten keinen, einen, oder zwei unendliche Zweige hat.

Ich theile nun die Kurven jeder Hauptabtheilung in Unterabtheilungen nach der Anzahl und Lage ihrer discontinuirlichen Theile. Diese sind immer leicht aus dem zugehörigen Kegelschnitte zu bestimmen. Ist z. B. der Theil des Kegelschnittes, welcher sich im 1. Quadranten befindet, eine Linie, welche zwei Punkte der positiven Ordinatenaxe verbindet und die Abscissenaxe nicht berührt (Fig. 4), so besteht die Kurve aus zwei außerhalb einander liegenden Ovalen**), was sehr leicht einzusehen ist. Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so kann diese zu der Abscissenaxe folgende fünf verschiedene Lagen haben:

1. Die Ellipse liegt ganz im 2. und 1. Quadranten und berührt die Abscissenaxe nicht;

---

*) Ist β eine positive Größe, so verstehe ich unter $\sqrt{\beta}$ stets den positiven Werth der Wurzel.

**) Unter einem Ovale verstehe ich einen in sich zurücklaufenden Linienzug, wie seine Gestalt sonst auch sein mag. —

2. Die Ellipse liegt ganz im 2. und 1. Quadranten und berührt die Abscissenaxe;
3. Die Ellipse schneidet die Abscissenaxe;
4. Die Ellipse liegt ganz im 3. und 4. Quadranten und berührt die Abscissenaxe;
5. Die Ellipse liegt ganz im 3. und 4. Quadranten und berührt die Abscissenaxe nicht.

Bei der Lage 1 kann die Ellipse wieder folgende Lagen zu der Ordinatenaxe haben:

a. Sie liegt ganz im 2. Quadranten, ohne die Ordinatenaxe zu berühren. Die zugehörige Kurve ist dann völlig imaginär.
b. Sie liegt im 2. Quadranten und berührt die Ordinatenaxe. Die Kurve besteht dann aus zwei conjugirten Punkten.
c. Sie schneidet die Ordinatenaxe (Fig. 4). Die Kurve besteht dann aus zwei außerhalb einander liegenden Ovalen.
d. Sie liegt im 1. Quadranten und berührt die Ordinatenaxe (Fig. 3). Die Kurve besteht dann aus vier Ovalen, von denen je zwei einen Punkt gemein haben.
e. Sie liegt im 1. Quadranten, ohne die Ordinantenaxe zu berühren (Fig. 1). Die Kurve besteht dann aus vier außerhalb einander liegenden Ovalen.

Durchgeht man ebenso die Fälle 2 bis 5 und die Fälle, wo der Kegelschnitt eine Hyperbel oder Parabel ist, so findet man, daß es in der 1. Hauptabtheilung vierzehn Unterabtheilungen giebt. Die Bestandtheile der Kurve können nämlich sein:*)

1. 4 außerhalb einander liegende Ovale (Fig. 1 und 2);
2. 4 außerhalb einander liegende Ovale, von denen je zwei einen Punkt gemein haben (Fig. 3);
3. 2 außerhalb einander liegende Ovale und 2 conjugirte Punkte (Fig. 7);
4. 2 außerhalb einander liegende Ovale (Fig. 4);
5. 2 Ovale, welche den Anfangspunkt gemein haben (Fig. 5);
6. 2 Ovale, welche sich in zwei Punkten schneiden (Fig. 6.);

† 7. 2 Ovale, welche sich in vier Punkten schneiden (Fig. 11);**)

8. 2 Ovale, von denen eins das andere einschließt (Fig. 8);
9. ein Oval und ein conjugirter Punkt innerhalb desselben (Fig. 9);
10. ein Oval (Fig. 10);

†11. 4 conjugirte Punkte (der Kegelschnitt ist ein conjugirter Punkt im 1. Qnadraten);

12. 2 conjugirte Punkte;

---

*) Wenn nichts Anderes bemerkt ist, haben die angeführten Theile der Kurve keinen Punkt gemeinsam.

**) Die mit † bezeichneten Unterabtheilungen enthalten nach Salmon, higher plane curves, Art. 34, nur Kurven, welche aus zwei Kegelschnitten bestehen. Die Gleichung einer Kurve der 11. Unterabtheilung ist das Product zweier Gleichungen vom 2. Grade mit imaginären Coefficienten; denn eine Gleichung vom 2. Grade mit reellen Coefficienten kann nicht zwei conjugirte Punkte geben.

13. ein conjugirter Punkt;
14. kein reeller Theil;

Zweite Hauptabtheilung. Die Kurve hat vier unendliche Zweige. Die Bestandtheile der Kurve können sein:

1—8. zwei sich nach zwei Seiten in's Unendliche erstreckende Züge und
1. zwei außerhalb einander liegende Ovale (Fig. 12);
2. zwei Ovale, die den Anfangspunkt gemein haben;
3. ein Oval, (Fig. 13 und 19);
4. ein Oval, welches mit jedem der unendlichen Züge einen Punkt gemein hat;
† 5. ein von jedem unendlichen Zuge zweimal geschnittenes Oval;
6. zwei conjugirte Punkte;
7. ein conjugirter Punkt;
8. sonst kein reeller Theil (Fig. 14 und 16);
† 9. zwei durch den Anfangspunkt gehende grade Linien und eine Ellipse;
10. vier vom Anfangspunkt ausgehende unendliche Zweige (Fig. 18).

Dritte Hauptabtheilung. Die Kurve hat acht unendliche Zweige.

Bestandtheile der Kurve.

1—7. Vier außerhalb einander liegende*) sich nach zwei Seiten in's Unendliche erstreckende Züge und
1. zwei außerhalb einander liegende Ovale (Fig. 26);
2. zwei Ovale, welche den Anfangspunkt gemein haben;
3. ein Oval (Fig. 27);
4. ein Oval, welches mit zwei der unendlichen Züge je einen Punkt gemein hat;
5. zwei conjugirte Punkte;
6. ein conjugirter Punkt;
7. sonst kein reeller Theil;

8—10. Vier sich nach zwei Seiten in's Unendliche erstreckende Züge, von denen
8. zwei den Anfangspunkt gemein haben;
9. zwei die andern einschließen (Fig. 28);
10. je zwei einen Punkt gemein haben;
†11. zwei sich in vier Punkten schneiden;
†12. vier durch den Anfangspunkt gehende grade Linien.

Bemerkung. Drei Fälle sind hier unberücksichtigt geblieben, nämlich erstens der, wo der Kegelschnitt aus zwei graden Linien, von denen eine mit der Axe zusammenfällt, die Kurve also aus zwei zusammenfallenden graden Linien und einem Kegelschnitte besteht, zweitens der, wo die Gleichung der Kurve ein Quadrat ist, diese also aus zwei zusammenfallenden Kegelschnitten besteht und drittens der, wo die Coefficienten der Gleichung imaginär sind. In diesem Falle besteht

*) Ich sage hier von zwei unendlichen Zügen, sie liegen außerhalb einander, wenn man von jedem beliebigen Punkte eines jeden eine Linie nach dem Anfangspunkte ziehen kann, ohne den andern zu schneiden (Fig. 26 und 27); der eine liegt innerhalb des andern, wenn dies nicht der Fall ist (Fig. 28).

die Kurve aus 16, 14, 13, 12, . . . 3, 2, oder einem Punkte, oder aus einem Kegelschnitte und einem, oder 2, oder 4 Punkten, oder sie ist völlig imaginär, was ich hier aber nicht weiter auseinandersetzen will.

§. 2. Im Folgenden sollen stets y und x die Coordinaten eines Punktes des Kegelschnittes, Y und X die Coordinaten des entsprechenden Punktes der Kurve im ersten Quadranten bezeichnen, so daß $Y = \sqrt{y}$, $X = \sqrt{x}$.

1. $$\frac{dY}{dX} = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

2. $$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{x}{y\sqrt{y}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{2x}{\sqrt{y}} \frac{d^2y}{dx^2}$$

3. $$\frac{d^3Y}{dX^3} = \sqrt{x} \left[-\frac{3}{y\sqrt{y}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{3x}{y^2\sqrt{y}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{6}{\sqrt{y}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{6x}{y\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4x}{\sqrt{y}} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \right]$$

4. Von einem Theile der Kurve im ersten Quadranten wachsen die Ordinaten mit den Abscissen, wenn für den entsprechenden Theil des Kegelschnittes die Ordinaten mit den Abscissen wachsen; die Ordinaten nehmen mit wachsenden Abscissen ab, wenn sie für den entsprechenden Theil des Kegelschnittes abnehmen (folgt aus 1).

5. Die Tangente an der Kurve ändert ihre Lage stetig, wenn der Berührungspunkt sich stetig ändert, was sich sehr leicht beweisen läßt. Die Kurve kann also keine Ecken haben. Auch Spitzen kann sie nicht haben. Denn hätte sie eine Spitze, welche nicht in einer Axe liegt, so hätte sie wegen ihrer Symmetrie zu beiden Axen vier Spitzen, und dies ist nach Salmon's higher plane curves, Art. 34 unmöglich; hätte sie aber in einer Axe, etwa der Ordinatenaxe, eine Spitze, so hätte sie in derselben auf der entgegengesetzten Seite der Abscissenaxe eine zweite, und die Ordinatenaxe hätte 6 Punkte mit der Kurve gemein. (Sie wäre nämlich wegen der Symmetrie der Kurve Tangente an beiden Spitzen.)

6. In der Gegend von solchen Punkten der Kurve im ersten Quadranten (nicht in einer Axe), deren Ordinaten ein Maximum oder Minimum erreichen, ist die Kurve convex oder concav gegen die Abscissenaxe, je nachdem der entsprechende Theil des Kegelschnittes convex oder concav gegen dieselbe ist. Bei einem Durchschnitte mit der Ordinatenaxe ist die Kurve, wenn der Schnittpunkt nicht ein Doppelpunkt ist, convex oder concav gegen die Abscissenaxe, je nachdem für den entsprechenden Theil des Kegelschnittes die Ordinaten mit wachsenden Abscissen wachsen oder abnehmen. Beide Sätze sind sehr leicht zu beweisen. Sie gelten natürlich auch, wenn man die Wörter „Abscisse", „Ordinate", „Abscissenaxe", „Ordinatenaxe", durch „Ordinate", „Abscisse" u. s. w. ersetzt.

7. Ist ein Theil des Kegelschnittes concav gegen die Abscissenaxe und nehmen seine Ordinaten mit wachsenden Abscissen ab, so ist auch

der entsprechende Theil der Kurve concav gegen die Abscissenaxe, denn es ist

$$\frac{dy}{dx} < o, \ \frac{d^2y}{dx^2} < o \text{ (Sturm, cours d' Analyse, 205)}$$

$$\text{also } \frac{d^2Y}{dX^2} < o \text{ (nach 2),}$$

woraus nach dem eben citirten Artikel im Sturm unsere Behauptung folgt.

8. Wird ein Oval der Kurve von der Ordinatenaxe geschnitten, und erreichen in dem Schnittpunkte, welcher die größere Ordinate hat, die Ordinaten ein Minimum, so liegt in dem Theile des Ovals, welcher von diesem Punkte bis zum ersten Punkte geht, in welchem die Ordinaten ein Maximum erreichen, ein, und zwar nur ein Inflexionspunkt.

Beweis. Bei dem Schnittpunkte mit der Ordinatenaxe ist $\frac{d^2Y}{dX^2} > o$, bei dem Punkte, in welchem die Ordinaten ein Maximum erreichen $\frac{d^2Y}{dX^2} < o$ (nach 6,). Man sieht aber leicht, daß zwischen beiden Punkten $\frac{d^2Y}{dX^2}$ eine stetige Function von X ist, also muß zwischen ihnen wenigstens einmal $\frac{d^2Y}{dX^2} = o$ sein. Mehr als ein Inflexionspunkt kann aber nicht zwischen ihnen liegen, denn, wenn man bedenkt, daß die Kurve symmetrisch zu der Ordinatenaxe ist, und daß eine Tangente an einem Inflexionspunkte drei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat, so sieht man leicht, daß die Tangente am zweiten Inflexionspunkte 6 Punkte mit der Kurve gemein hätte.

9. Eben so: Wenn ein Oval der Kurve von der Ordinatenaxe geschnitten wird und in dem Schnittpunkte mit der kleineren Ordinate die Ordinaten ein Maximum erreichen, so liegt in dem Theile der Kurve, welcher von diesem Punkte bis zu dem ersten Punkte geht, in welchem die Ordinaten ein Minimum erreichen, ein Inflexionspunkt. Auch gilt dieser und der vorige Satz, wenn man die Wörter „Abscisse“ und „Ordinate“, „Abscissenaxe“ und „Ordinatenaxe“ vertauscht.

10. Setzt man in der Gleichung des Kegelschnittes $y + n$ statt y, wo $n > o$, so daß die Ordinaten des ursprünglichen Kegelschnittes sämmtlich um dasselbe Stück n verkürzt werden, und entspricht einem Theile des neu entstandenen Kegelschnittes, welcher im ersten Quadranten liegt, gegen die Abscissenaxe convex ist und dessen Ordinaten mit den Abscissen wachsen, ein Theil der Kurve, der convex gegen die Abscissenaxe ist: so entspricht auch demjenigen Theil des ursprünglichen Kegelschnittes, der dieselben Abscissen hat, ein Theil der Kurve, welcher convex gegen die Abscissenaxe ist,

denn sind y und x die Coordinaten eines Punktes des neu entstandenen Kegelschnittes, so ist für den in Rede stehenden Theil der ursprünglichen Kurve

$$\frac{d^2 Y}{d X^2} = \frac{1}{\sqrt{y+n}} \left[\frac{d(y+n)}{dx} - \frac{x}{y+n} \left(\frac{d(y+n)}{dx} \right)^2 + 2x \frac{d^2(y+n)}{dx^2} \right]$$

(§. 2, 2,), für den entsprechenden Theil der Kurve, welche zu dem neu entstandenen Kegelschnitte gehört,

$$\frac{d^2 Y}{d X^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} \left[\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2x \frac{d^2 y}{dx^2} \right]$$

Ist nun schon in der letzten Gleichung $\frac{d^2 Y}{d X^2} > o$, so ist gewiß in der vorhergehenden $\frac{d^2 Y}{d X^2} > o$.

11. Wird ein Oval der Kurve von einem andern umschlossen, so kann es keinen Inflexionspunkt haben, denn hätte es einen, so könnte man durch ihn eine Tangente legen, welche mit dem innern Ovale wenigstens 4, mit dem äußeren wenigstens 2, also mit der Kurve wenigstens 6 Punkte gemein hätte.

12. Hat die Kurve einen endlichen reellen Undulationspunkt, für welchen nicht $X = o$ oder $Y = o$, so ist für ihn $X^4 = \frac{d^2 - 4af}{c^2 - 4ab}$, $Y^4 = \frac{e^2 - 4bf}{c^2 - 4ab}$.

Beweis: In einem Undulationspunkte fallen 2 Inflexionspunkte zusammen. Hieraus folgt, daß, wenn ein Punkt ein Undulationspunkt ist und um denselben $\frac{d^2 Y}{d X^2}$ eine stetige Funktion von X ist, sein muß $\frac{d^2 Y}{d X^2} = o$ und $\frac{d^3 Y}{d X^3} = o$. Hieraus und aus 2 und 3, folgt, daß für einen endlichen reellen Undulationspunkt der Kurve, welcher nicht in einer Axe liegt, sein muß

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{x}{y\sqrt{y}} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{2x}{\sqrt{y}} \frac{d^2 y}{dx^2} = o$$

$$- \frac{3}{y\sqrt{y}} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{3x}{y^2\sqrt{y}} \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + \frac{6}{\sqrt{y}} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{6x}{y\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4x}{\sqrt{y}} \frac{d^3 y}{dx^3} = o.$$

Wenn wir zu der zweiten Gleichung die erste mit $\frac{3}{y} \frac{dy}{dx}$ multiplicirt addiren und durch $\frac{2}{\sqrt{y}}$ theilen, so entsteht

$$+ \frac{3 d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{d^3 y}{dx^3} = o$$

Nun ist $y = \frac{-cx - d \pm \sqrt{(c^2 - 4ab)x^2 + 2(cd - 2ae)x + d^2 - 4af}}{2a}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{2a} \pm \frac{(c^2 - 4ab)x + cd - 2ae}{2a\sqrt{(c^2 - 4ab)x^2 + 2(cd - 2ae)x + d^2 - 4af}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{(c^2 - 4ab)(d^2 - 4af) - (cd - 2ae)^2}{2a\left[(c^2 - 4ab)x^2 + 2(cd - 2ae)x + d^2 - 4af\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \mp \frac{6[(c^2 - 4ab)(d^2 - 4af) - (cd - 2ae)^2][(c^2 - 4ab)x + cd - 2ae]}{4a\left[(c^2 - 4ab)x^2 + 2(cd - 2ae)x + d^2 - 4af\right]^{\frac{5}{2}}}$$

Wenn wir diese Werthe in die Gleichung I einsetzen, so sehen wir, daß, wenn sie erfüllt sein soll, sein muß

entweder $(c^2 - 4ab)(d^2 - 4af) - (cd - 2ae)^2 = o$

oder $\frac{2x[(c^2 - 4ab)x + cd - 2ae]}{(c^2 - 4ab)x^2 + 2(cd - 2ae)x + d^2 - 4af} = 1.$

Wenn die erste dieser beiden Gleichungen erfüllt ist, so besteht der Kegelschnitt aus graden Linien, die Kurve aus 2 Kegelschnitten und hat also keinen Undulationspunkt (einen Doppelpunkt rechne ich nicht als Undulationspunkt.) Wenn also die Kurve einen endlichen reellen Undulationspunkt hat, welcher nicht in einer Axe liegt, so ist für ihn die letzte Gleichung erfüllt, oder $x^2 = \frac{d^2 - 4af}{c^2 - 4ab}$. Hieraus folgt durch Vertauschung der Axen, daß $y^2 = \frac{e^2 - 4bf}{c^2 - 4ab.}$

13. Wenn in einer Axe ein Undulationspunkt liegt, so müssen in derselben die Ordinaten oder Abscissen des Kegelschnittes ein Maximum oder Minimum erreichen.

Denn soll z. B. in der Ordinatenaxe ein Undulationspunkt liegen, so muß zugleich sein $x = o$ und $\frac{d^2Y}{dX^2} = o$, also $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{d^2y}{dx^2} = o$, woraus folgt $\frac{dy}{dx} = o$. Daß jetzt auch $\frac{d^3Y}{dX^3} = o$, folgt aus 3.

§. 3. Wir wollen nun zuerst die Kurven der ersten Hauptabtheilung untersuchen, welche Knotenpunkte haben, also die der 2., 5. und 6. Unterabtheilung.

I. Es sei A B C D (Fig. 3) der Kegelschnitt für eine Kurve der 2. Unterabtheilung, und zwar sei die Ordinatenaxe die von ihm berührte Axe (was sich, wenn es nicht der Fall ist, durch Vertauschung der Axen erreichen läßt), A der Berührungspunkt mit derselben, C der Punkt mit der größten Abscisse, B der Punkt mit der größten, D der mit der kleinsten Ordinate. Dem Theil BC des Kegelschnittes entspricht im ersten Quadranten ein Theil $\beta\gamma$ der Kurve, welcher concav gegen die Abscissenaxe ist (§. 2, 7). Verkürzt man sämmtliche Ordinaten des

Kegelschnittes um so viel, daß der Punkt D in die Abscissenaxe fällt (Fig. 11), so geht die Kurve in eine der 7. Unterabtheilung über und besteht aus zwei Ellipsen, es entspricht also dem Theil CD des Kegelschnittes ein Theil $\gamma\,\delta$ der Kurve, welcher convex gegen die Abscissenaxe ist, daher ist auch für die Kurven der 2. Unterabtheilung $\gamma\,\delta$ convex gegen die Abscissenaxe (§. 2, 10.) Wir haben jetzt noch die Theile $\alpha\,\beta$ und $\alpha\,\delta$ der Kurve zu untersuchen, welche den Theilen A B und A D des Kegelschnittes entsprechen. Da der Kegelschnitt die Ordinatenaxe berührt, ist $d^2 - 4\,a\,f = o$, also

$$y = \frac{-c\,x - d \pm \sqrt{(c^2 - 4\,a\,b)\,x^2 + 2\,(c\,d - 2\,a\,e)\,x}}{2\,a}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{c}{2\,a} \pm \frac{(c^2 - 4\,a\,b)\,x + c\,d - 2\,a\,e}{2\,a\sqrt{(c^2 - 4\,a\,b)\,x^2 + 2\,(c\,d - 2\,a\,e)\,x}}$$

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \pm \frac{c^2 - 4\,a\,b}{2\,a\sqrt{(c^2 - 4\,a\,b)\,x^2 + 2\,(c\,d - 2\,a\,e)\,x}} \mp \frac{[(c^2 - 4\,a\,b)\,x + c\,d - 2\,a\,e]^2}{2\,a\,[(c^2 - 4\,a\,b)\,x^2 + 2\,(c\,d - 2\,a\,e)\,x]^{\frac{3}{2}}}$$

Ich will nun den Grenzwerth ermitteln, welchem sich $\frac{d^2\,Y}{d\,X^2}$ nähert, wenn X, also auch x sich der Null nähert. Es ist $\frac{d^2\,Y}{d\,X^2} = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{d\,y}{d\,x} - \frac{x}{y\sqrt{y}}\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 + \frac{2\,x}{\sqrt{y}}\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ (§. 2, 2). Man findet nun leicht, wenn man die für $\frac{d\,y}{d\,x}$ und $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ gefundenen Werthe benutzt,

$$\lim \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{d\,y}{d\,x} = \lim\left[-\frac{c}{2\,a\sqrt{y}} \pm \frac{c\,d - 2\,a\,e}{2\,a\sqrt{y}.\sqrt{2\,(c\,d - 2\,a\,e)\,x}}\right]$$

$$\lim\left[-\frac{x}{y\sqrt{y}}\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right] = \lim\left[\frac{-c\,d + 2\,a\,e}{8\,a^2\,y\sqrt{y}}\right]$$

$$\lim \frac{2\,x}{\sqrt{y}}\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \lim\left[\mp \frac{c\,d - 2\,a\,e}{2\,a\sqrt{y}.\sqrt{2\,(c\,d - 2\,a\,e)\,x}}\right]$$

also $$\lim \frac{d^2\,Y}{d\,X^2} = \lim\left[-\frac{c}{2\,a\sqrt{y}} - \frac{c\,d - 2\,a\,e}{8\,a^2\,y\sqrt{y}}\right]$$

also, da $\lim y = -\frac{d}{2\,a}$,

$$\lim \frac{d^2\,Y}{d\,X^2} = -\frac{c\,d + 2\,a\,e}{4\,a\,d\sqrt{-\frac{d}{2\,a}}}$$

Ist dieser Ausdruck negativ, so sind $\alpha\beta$ und $\alpha\delta$ beide anfangs (von α aus gerechnet) concav gegen die Abscissenaxe; ist er positiv, so sind anfangs $\alpha\delta$ und $\alpha\beta$ convex gegen die Abscissenaxe; $\alpha\beta$ hat aber, wenn es anfangs convex ist, einen Inflexionspunkt, welche Behauptungen sich wie §. 2, 8 beweisen lassen. Ist $\lim \frac{d^2 Y}{d X_2} = o$, so sind die Doppelpunkte Inflexionspunkte, und weiter hat die Kurve keinen Inflexionspunkt; sie besteht aus zwei lemniscatenartigen Schleifen. Denn man verkürze sämmtliche Ordinaten des Kegelschnittes um so viel, daß er auch die Abscissenaxe berührt. Dann ist die zugehörige Kurve aus 2 Ellipsen zusammengesetzt (§. 1) und $\alpha\delta$ (Fig. 11) ist concav gegen die Abscissenaxe. Wenn man nun die Ordinaten des Kegelschnittes wieder wachsen läßt, so ist $\alpha\beta$, so lange $-\frac{cd+2ae}{4ad\sqrt{-\frac{d}{2a}}} < o$ ist, wie wir gesehen haben, zuerst concav, dann convex gegen die Abscissenaxe; ist aber $-\frac{cd+2ae}{4ad\sqrt{-\frac{d}{2a}}} > o$, so ist $\alpha\delta$ ganz convex. Nun kann aber nicht bei stetigem Wachsen der Kegelschnittsordinaten der concave Theil von $\alpha\delta$ plötzlich verschwinden (denn man sieht leicht daß, wenn der Kegelschnitt sich stetig ändert, auch die Kurve sich stetig ändert); er muß daher, da er, sobald $-\frac{cd+2ae}{4ad\sqrt{-\frac{d}{2a}}}$ negativ ist, verschwunden ist, immer kleiner und kleiner werden, wenn dieser Ausdruck sich der Null nähert.* (Daß nämlich die Größe $-\frac{cd+2ae}{4ad\sqrt{-\frac{d}{2a}}}$, wenn sie Null ist, bei weiterm Wachsen der Kegelschnittsordinaten sofort positiv wird, sieht man leicht ein, wenn man wirklich in der Gleichung des Kegelschnittes $y-n$ statt y setzt.) Ist also $-\frac{cd+2ae}{4ad\sqrt{-\frac{d}{2a}}} = o$, so hat $\alpha\delta$ und (was sich ebenso beweisen läßt) auch $\alpha\beta$ keinen Inflexionspunkt. Aus dem Gesagten ergiebt sich:

In der 2. Unterabtheilung der 1. Hauptabtheilung giebt es drei

---

*) Daß $-\frac{cd+2ae}{4ad\sqrt{-\frac{d}{2a}}}$ für die Kurven der 2. Unterabtheilung nicht unendlich werden kann, läßt sich leicht beweisen.

Arten von Kurven. In der ersten Art (Fig. 3) hat jedes Oval auf der Seite einen Inflexionspunkt, welche den drei übrigen Ovalen zugekehrt ist (d. h. in $\alpha\,\delta$); für die Kurven der 2. Art sind die Doppelpunkte Inflexionspunkte von beiden sich in denselben schneidenden Zweigen; von den Kurven der 3. Art hat jedes Oval auf der Seite einen Inflexionspunkt, welche dem anliegenden Ovale zugekehrt, von den übrigen abgewandt ist.

Da das Zeichen von $-\dfrac{c\,d + 2\,a\,e}{4\,a\,d\sqrt{-\dfrac{d}{2\,a}}}$ mit dem Zeichen von $c\,d + 2\,a\,e$ übereinstimmt (a und d haben entgegengesetzte Zeichen, da sonst für $x — o\,y$ negativ, Y imaginär wäre), so sieht man, daß, wenn die Doppelpunkte in der Ordinatenaxe liegen, die Kurve zur 1., 2. oder 3. Art gehört, je nachdem $c\,d + 2\,a\,e < o$, $c\,d + 2\,a\,e = o$, oder $c\,d + 2\,a\,e > o$. Liegen die Doppelpunkte in der Abscissenaxe, so findet man durch Vertauschung der Axen, daß die Kurve zur 1., 2. oder 3. Art gehört, je nachdem $c\,e + 2\,b\,d < o, = o$, oder $> o$. Da die wirkliche Existenz aller 3 Arten noch nicht nachgewiesen ist, so gebe ich von ihnen Beispiele.

Beispiel der 1. Art: $Y^4 + 16\,X^4 - 7\,X^2\,Y^2 - \frac{14}{3}\,Y^2 - \frac{53}{3}\,X^2 + \frac{49}{9} = o$

" " 2. Art: $Y^4 + 16\,X^4 - 7\,X^2\,Y^2 - \frac{34}{7}\,Y^2 - 17\,X^2 + \frac{289}{49} = o$

" " 3. Art: $Y^4 + 16\,X^4 - 7\,X^2\,Y^2 - 10\,Y_2 + X^2 + 25 = o$

II. Die Kurven der 6. Unterabtheilung lassen sich leicht untersuchen. Wir wollen wieder annehmen, die Doppelpuntte liegen in der Ordinatenaxe. Es sei D A B (Fig. 6) der Kegelschnitt für eine Kurve der 6. Unterabtheilung, A sein Berührungspunkt mit der Ordinatenaxe, C der Punkt mit der größten Ordinate, D und B die Schnittpunkte mit der Abscissenaxe; den Punkten A, B, C, D des Kegelschnittes entsprechen die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Kurve. Man sieht leicht, daß die Theile $\alpha\,\delta$ und $\alpha\,\gamma$ der Kurve keinen Inflexionspunkt haben, weil sonst eine grade Linie möglich wäre, welche mehr als 4 Punkte mit der Kurve gemein hätte, daß ferner $\gamma\,\beta$ keinen oder einen Inflexionspunkt hat, je nachdem die Abscissen des Kegelschnittes im 1. Quadranten kein oder ein Maximum erreichen (§. 2, 7 und 8). Es giebt daher in dieser Unterabtheilung 2 Arten von Kurven, von denen die 2. die Gestalt der stark gezeichneten Kurve in Fig. 6 hat; die Gestalt der 1. Art erhält man, wenn man die Linie $\zeta\,\beta$ durch die feinere $\zeta\,\beta'$ ersetzt.

Bemerkung. Erreichen die Abscissen des Kegelschnitts grade bei seinem Durchschnitte mit der Abscissenaxe ein Maximum, so hat die Kurve zwei Undulationspunkte (§. 2, 13) und wir wollen sie zu der 1. Art rechnen, da sie sich von dieser ihrer äußeren Gestalt nach nicht unterscheidet.

III. In der 5. Unterabtheilung giebt es 2 Arten von Kurven, von denen die 2. in Fig. 5 dargestellt ist, die 1. keinen Inflexionspunkt

außer dem Doppelpunkte hat. Die Kurve gehört zur 1. oder 2. Art, je nachdem die Abscissen des Kegelschnittes im ersten Quadranten kein oder ein Maximum erreichen. Dies ist sehr leicht einzusehen.

§. 4. 1. Wir gehen jetzt zu den Kurven der ersten Unterabtheilung über. Jedes Oval von einer der betrachteten Kurven kann, wie aus §. 2, 5, folgt, nur eine grade Anzahl von Inflexionspunkten haben. Ferner sieht man leicht, daß ein Oval, welches 2 Inflexionspunkte hat, eine, ein Oval mit 4 oder mehr Inflexionspunkten 2 oder mehr Doppeltangenten hat. An 2 verschiedenen Ovalen sind nun aber 4 Doppeltangenten (2 zwischen beiden hindurchgehende und 2 auf derselben Seite von beiden liegende) möglich, also kann man an je 2 verschiedene von 4 Ovalen 24 Doppeltangenten legen; da aber immer auf 2 Inflecionspunkte noch wenigstens eine Doppeltangente der Kurve hinzukommt und sie nicht mehr als 28 Doppeltangenten haben kann (Salmon, higher plane curves, Art. 98), so kann sie nicht mehr als 8 Inflexionspunkte haben. Bedenkt man nun, daß immer wenigstens 2 der Ovale congruent sind, so sieht man, daß in der 1. Unterabtheilung keine andere als folgende Arten von Kurven vorhanden sein können:

1) Jedes Oval hat an der Seite, welche den 3 übrigen zugekehrt ist,* 2 Inflexionspunkte,
2) Jedes Oval hat an einer Seite, welche einem Ovale zugekehrt, von den übrigen abgewandt ist, 2 Inflexionspunkte,
3) 2 Ovale haben je 2, die beiden andern keinen Inflexionspunkt,
4) Die Kurve hat keinen Inflexionspunkt,
5) 2 Ovale haben je 4, die andern keinen Inflexionspunkt.**

Von diesen Arten sind die 4 ersten möglich, die 5. nicht. Ist nämlich der Kegelschnitt eine Ellipse, welche ganz im 1. Quadranten liegt, so sind die Ovale der Kurve sämmtlich congruent, daher kann diese nur von der 1., 2. und 4. Art sein. Sie kann wirklich von der 1. und 2. Art sein, denn wenn wir für eine Kurve der 2. Unterabtheilung, deren Doppelpunkte in der Ordinatenaxe liegen, sämmtliche Abscissen des Kegelschnittes um ein bestimmtes Stück n größer werden lassen, so wird, wenn n stetig von o bis ∞ wächst, $\frac{d^2 Y}{d X^2}$ sich für jeden Werth von y (die Werthe ausgenommen, für die $\frac{d y}{d x}$ ∞) ebenfalls stetig ändern (denn die Glieder des in §. 2, 2) gegebenen Ausdruck für $\frac{d^2 Y}{d X^2}$, ändern sich theils nicht, theils stetig), und hieraus erkennt man leicht,

---

*) Ist der Kegelschnitt eine Ellipse (Fig. 1), so erreichen die Abscissen jedes Ovals der Kurve einmal (bei α) ein Minimum und einmal bei γ ein Maximum; die Ordinaten erreichen bei δ ein Minimum, bei β ein Maximum (§. 2, 4). Ich nenne nun $\alpha\ \delta$ die den 3 übrigen Ovalen zugekehrte Seite des Ovals, $\alpha\ \beta$ und $\gamma\ \delta$ die einem Ovale zugekehrte und von zweien abgewandte Seite u. s. w. Aehnliches gilt, wenn der Kegelschnitt eine Hyperbel ist. (Fig 2.)

**) Daß nämlich die Seite eines Ovals, welche von den 3 übrigen abgewandt ist, keinen Inflexionspunkt haben kann, folgt aus §. 2, 7—9.)

daß, wenn man die Abscissen des Kegelschnittes einer Kurve von der 2. Unterabtheilung sämmtlich um ein constantes Stück wachsen läßt, welches kleiner ist, als eine bestimmte Größe **m**, die jetzt zu dem Kegelschnitt gehörige Kurve entweder zur 1. oder zur 2. Art der 1. Unterabtheilung gehört, je nachdem die Kurve, von der wir ausgingen, von der 1. oder 3. Art der 2. Unterabtheilung war. Um zu zeigen, daß eine Kurve der 1. Unterabtheilung, wenn der Kegelschnitt eine Ellipse ist, auch von der 4. Art sein kann, gehen wir von einer Ellipse aus, deren Gleichung in Bezug auf **y** und **x** symmetrisch ist, etwa von dem Kreise $y^2 + x^2 - r^2 = o$ und lassen **y** und **x** um dasselbe Stück **n** wachsen, so daß die Gleichung des Kreises wird $(y-n)^2 + (x-n)^2 - r^2 = o$. Sobald **n** eine bestimmte Grenze überschritten hat, wird die Kurve zu der ersten Unterabtheilung gehören. Lassen wir **n** immer mehr und mehr wachsen, so werden für einen Punkt des beweglichen Kreises **y** und **x** immer größer, während $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ unverändert bleiben; daher wird das Zeichen von $\frac{d^2Y}{dX^2}$ oder

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y}\frac{dy^2}{dx^2} + 2x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

sich immer mehr dem Zeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ nähern, abgesehen von den Werthen von **y** und **x**, für welche $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird. Hieraus folgt leicht, daß, wenn **n** immer größer und größer wird, für die dem Kreise entsprechende Kurve die Inflexionspunkte entweder verschwinden, oder daß die ihnen entsprechenden Punkte des Kreises sich einem Punkte nähern, für welchen $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist. Nähert sich aber einem solchen Punkte ein Inflexionspunkt, so muß sich, da die Gleichung in Bezug auf **y** und **x** symmetrisch ist, auch einem Punkte, für den $\frac{dx}{dy} = \infty$ oder $\frac{dy}{dx} = o$ ist, ein Inflexionspunkt nähern, was nach dem Obigen unmöglich ist (denn dann müßte die Kurve entweder zwischen den genannten Punkten concav gegen die Abscissenaxe sein, oder sie müßte 16 reelle Inflexionspunkte haben.). Daher ist, sobald **n** eine bestimmte Grenze überschritten hat, die Kurve von der 4. Art.

Wir wollen nun annehmen, der Kegelschnitt sei eine Hyperbel. Es seien A B C und D E F (Fig. 2) die Hyperbeläste; in dem von der Ordinatenaxe geschnittenen sei B der Punkt mit der kleinsten Ordinate, G der Punkt mit der größten Abscisse; in dem von der Abscissenaxe geschnittenen sei E der Punkt mit der kleinsten Abscisse, H der mit der größten Ordinate. Wenn die Punkte B und E beide im 1. Quadranten liegen, so ist die Kurve, wie aus §. 2, 8 und 9 folgt, von der 1., wenn

nur einer von ihnen im ersten Quadranten liegt, von der 3. Art. Liegt keiner der Punkte B und E im ersten Quadranten, so lasse man sämmtliche Ordinaten des Kegelschnittes um so viel wachsen, daß der Punkt E in den 1. Quadranten kommt, und verkürze sie dann wieder um dasselbe Stück; man findet dann, wie in §. 2, 10, daß der D H entsprechende Theil der Kurve concav gegen die Abscissenaxe ist. Ebenso ist der A G entsprechende Theil der Kurve gegen die Ordinatenaxe concav; die Kurve ist also von der 4. Art. Eine Kurve der ersten Unterabtheilung gehört also immer zu einer der vier ersten der oben angeführten Arten.

II. Die Kurven der 3. Unterabtheilung sind nahe verwandt mit denen der 1., deren Kegelschnitt eine Hyperbel ist, und man sieht leicht, daß sie in 2 Arten zerfallen, von denen die 1. vier, die 2. keinen Inflexionspunkt hat. Von den Doppeltangenten fallen hier viele zusammen.

III. Für die Kurven der 4. Unterabtheilung kann der Kegelschnitt eine vierfache Lage haben. Es sei in ihm (Fig. 4) A der Punkt mit der größten Abscisse, B und C die Durchschnitte mit der Ordinatenaxe (wenn der Kegelschnitt die positive Abscissenaxe schneidet, so vertausche man die Axen). Nun erreichen im 1. Quadranten entweder, wie in Fig. 4, die Ordinaten von A B ein Maximum und die von A C ein Minimum; oder es erreichen die Ordinaten von A B ein Maximum, die von A C kein Minimum; oder es erreichen die Ordinaten von A B kein Maximum, die von A C ein Minimum; oder die Ordinaten von A B und A C erreichen beide kein Maximum oder Minimum. Im 1. und 2. Falle hat der Theil der Kurve im 1. Quadranten, welcher dem Theile A D des Kegelschnittes entspricht, im 3. und 4. Falle der, welcher A B entspricht, keinen Inflexionspunkt (§. 2, 7). Diejenigen Theile der Kurve im 1. Quadranten, welche C E und B D im 1., B D im 2., C E im 3. Falle entsprechen, haben je einen Inflexionspunkt (§. 2, 8). Die Theile der Kurve, welche E A im 1. und 3., C A im 2. und 4. Falle entsprechen, haben keinen Inflexionspunkt. Denn man verkürze sämmtliche Ordinaten des Kegelschnittes um so viel, daß im 1. und 3. Falle die Ordinate von E, im 2. und 4. die von C Null wird. Die jetzt dem Kegelschnitte entsprechende Kurve gehört im 1. und 3. Falle zur 6., im 2. und 4. zur 5. Unterabtheilung, und die in Rede stehenden Theile des Kegelschnittes sind jetzt, wie wir in §. 3, 2. und 3. gesehen haben, convex gegen die Abscissenaxe. Daher sind auch in der ursprünglichen Kurve die in Rede stehenden Theile convex gegen die Abscissenaxe. (§. 2, 10.) Aus dem Gesagten folgt:

In der 4. Unterabtheilung der 1. Hauptabtheilung giebt es 4 Arten von Kurven. In der 1. Art hat jedes Oval 2 Inflexionspunkte auf der Seite, welche dem andern Ovale zugekehrt ist, und 2 auf der entgegengesetzten (Fig. 4); in der 2. Art hat jedes Oval 2 Inflexionspunkte, und zwar auf der Seite, welche von dem andern Ovale abgewandt ist; in der 3. Art hat jedes Oval 2 Inflexionspunkte auf der Seite, welche dem andern Ovale zugekehrt ist; in der 4. Art hat die Kurve keinen Inflexionspunkt.

IV. Wir haben jetzt in der 1. Hauptabtheilung noch die Kurven der 8., 9. und 10. Unterabtheilung zu untersuchen. Das innere Oval der Kurven der 8. Unterabtheilung hat nie einen Inflexionspunkt. (§. 2, 11.) Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so seien A B und C D (Fig. 8 und 10) die Asymptoten derselben, E der Schnittpunkt der Asymptoten. Die Hyperbel liegt entweder in den Winkeln C E A und B E D (Fig. 10), oder in den Winkeln C E B und A E D (Fig. 8). Wir wollen zuerst annehmen, sie liege in den Winkeln C E B und A E D (Fig. 8). Es sei F G derjenige Theil des Kegelschnittes, welchem das äußere Ovol einer Kurve der 8., oder das Oval einer Kurve der 9. oder 10. Unterabtheilung entspricht. Wir wollen nun die Ordinaten des Kegelschnittes sämmtlich um dasselbe Stück m verkürzen, also in seiner Gleichung y + m statt y setzen. Wenn wir nun m allmälig von o an immer größer werden lassen, so wird der größte Werth, welchen die Abscissen im 1. Quadranten haben können, immer kleiner, so daß, sobald m eine bestimmte Grenze überschritten hat, auf das Zeichen von $\frac{d^2 Y}{d X^2} = \frac{1}{\sqrt{y}}\left[\frac{d y}{d x} - \frac{x}{y}\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + 2 x \frac{d^2 y}{d x^2}\right]$ das Glied $2 x \frac{d^2 y}{d x^2}$ keinen Einfluß mehr hat. Hieraus folgt, da die Glieder $\frac{d y}{d x}$ und $-\frac{x}{y}\left(\frac{d y}{d x}\right)^2$ negativ sind, daß, sobald m eine bestimmte Grenze überschritten hat, die Kurve keinen reellen Inflexionspunkt hat. Wir wollen nun m, wenn es einen solchen Werth hat, für den die Kurve keinen reellen Inflexionspunkt hat, wieder stetig abnehmen lassen, so daß es bis $-\infty$ gehen kann. Da, wie man leicht sieht, die dem Kegelschnitt entsprechende Kurve sich mit m stetig ändert, so kann sie keinen Inflexionspunkt erlangen, ohne vorher einen Undulationspunkt gehabt zu haben. Für x = o oder y = o kann sie keinen Undulationspunkt haben, da nie $\frac{d y}{d x} = o$, oder $\frac{d x}{d y} = o$ (§. 2, 13); sie kann also (nach §. 2, 12), nur für $x = \sqrt{\frac{d^2 - 4 a f}{c^2 - 4 a b}}$ Undulationspunkte haben. Dieser Werth ist aber von m unabhängig, denn in der Gleichung $a (y + m)^2 + + b x^2 + c (y + m) x + d (y + m) + ex + f = o$ oder $ay^2 + bx^2 + cyx + + (d + 2 am) y + (e + cm) x + am^2 + dm + f = o$ ist

$$\left(\frac{d + 2 a m)^2 - 4 a (a m^2 + d m + f}{c^2 - 4 a b}\right) = \frac{d^2 - 4 a f}{c^2 - 4 a b}.$$

Nun kann aber $\frac{d^2 Y}{d X^2}$ oder $\frac{1}{\sqrt{y}}\left[\frac{d y}{d x} - \frac{x}{y}\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + 2 x \frac{d^2 y}{d x^2}\right]$ bei verschiedenen Werthen von m nicht für dieselben Werthe von x Null werden; denn wenn sich m ändert und x nicht, so ändern sich $\frac{d y}{d x}$

und $\frac{d^2 y}{d x^2}$ nicht, $\bar{y}$ aber ändert sich um eben so viel, wie **m**; ist also die Größe $\frac{1}{\sqrt{y}}\left[\frac{d y}{d x} - \frac{x}{y}\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + 2 x \frac{d^2 y}{d x^2}\right]$ bei einem bestimmten Werthe von x für ein bestimmtes m Null, so ist sie bei demselben x immer negativ für ein größeres, immer positiv für ein kleineres m. Die Kurve kann also nur bei einem einzigen Werthe von m reelle Undulationspunkte haben (und zwar hat sie dann 4 symmetrisch zu beiden Axen liegende); nimmt dann m noch weiter ab, so können aus jedem Undulationspunkte nur 2 Inflexionspunkte entstehen, denn sonst hätte die Kurve im Undulationspunkte mehr als 2 zusammenfallende Inflexionspunkte, die Tangente an ihm hätte also mehr als 4 zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein. Die Kurve hat also immer 8 oder keinen Inflexionspunkt.

Ist aber der Kegelschnitt eine Hyperbel, welche in den Winkeln C E A und B E D liegt (Fig. 10), oder eine Ellipse, so hat, wie aus §. 2, 7 und 8 folgt, die Kurve keinen Iflexionspunkt, wenn weder die Ordinaten, noch die Abscissen des Kegelschnittes im 1. Quadranten ein Maximum erreichen; 4, wenn entweder die Ordinaten, oder die Abscissen im 1. Quadranten ein Maximum erreichen; 8, wenn die Ordinaten und die Abscissen ein Maximum haben.

Hieraus und aus dem vorhin Gesagten folgt, daß es in der 8., 9. und 10. Unterabtheilung je 3 Arten von Kurven giebt, von welchen die 1. keinen, die 2. 4, die 3. 8 Inflexionspunkte hat.

§. 5, 1. Wir sahen in §. 2, 12, daß, wenn einem Punkte des Kegelschnittes ein endlicher reeller Undulationspunkt entspricht, dessen Ordinate oder Abscisse nicht = o ist, seine Coordinaten sind $y = \pm \sqrt{\frac{e^2 - 4 b f}{c^2 - 4 a b}}$, $x = \pm \sqrt{\frac{d^2 - 4 a f}{c^2 - 4 a b}}$; $+ \frac{d^2 - 4 a f}{c^2 - 4 a b}$, ist aber das Produkt der Wurzeln der Gleichung $(c^2 - 4 a b) x^2 + 2 (c d - 2 a e) x + + d^2 - 4 a f = o$, und diese sind die Abscissen der Tangenten, welche man parallel der Ordinatenaxe an den Kegelschnitt ziehen kann. Hieraus ergiebt sich:

Entspricht einem Punkte des Kegelschnittes ein endlicher reeller Undulationspunkt, und ist für ihn nicht y = o oder x = o, so ist seine Abscisse die mittlere Proportionale zwischen den Abscissen der Tangenten, welche man parellel der Ordinatenaxe an den Kegelschnitt ziehen kann, seine Ordinate die mittlere Proportionale zwischen den Ordinaten der Tangenten, welche man parallel der Abscissenaxe an den Kegelschnitt ziehen kann.

2) Entspricht der Kurve eine Hyperbel, so ist ein unendlicher Zweig der Kurve von einem bestimmten Punkte an bis in's Unendliche immer convex, oder immer concav gegen die Abscissenaxe, je nachdem die Asymptote des ihm entsprechenden Hyperbelzweiges die Ordinatenaxe in einem Punkte mit positiver, oder negativer Ordinate schneidet.

Beweis. Es ist $\frac{d^2 Y}{d X_2} = \frac{1}{\sqrt{y}}\left[\frac{d\,y}{d\,x} - \frac{x}{y}\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 + 2\,x\,\frac{d^2 y}{d\,x^2}\right]$,

$$y = \frac{-cx - d \pm \sqrt{(c^2-4ab)x^2 + 2(cd-2ae)x + d^2 - 4af}}{2a}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{c}{2a} \pm \frac{(c^2-4ab)x + cd - 2ae}{2a\sqrt{(c^2-4ab)x^2 + 2(cd-2ae)x + d^2 - 4af}}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \pm \frac{(c^2-4ab)(d^2-4af) - (cd-2ae)^2}{2a\left[(c^2-4ab)x^2 + 2(cd-2ae)x + d^2-4af\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Wenden wir auf diese Größen den binomischen Lehrsatz an, indem wir immer $2\,(c\,d - 2\,a\,e)\,x + + d^2 - 4\,a\,f)$ als ein Glied betrachten, so finden wir, daß, sobald x einen bestimmten Werth überschritten hat,

$$\frac{y}{x} = \frac{-c - \frac{d}{x} \pm \sqrt{c^2 - 4\,a\,b}.\left[1 + \frac{c\,d - 2\,a\,e}{(c^2-4ab)x} + \frac{A}{x^2} + \ldots\right]}{2\,a}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4\,a\,b} + \frac{B}{x^2} + \ldots}{2a}, \quad 2\,x\,\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{C}{x^2} + \ldots$$

$$\text{also } \frac{d^2 Y}{d X^2} = \frac{1}{\sqrt{y}}\left[\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\,a\,b} + \frac{B}{x^2} + \ldots}{2\,a} - \right.$$

$$\left. \frac{\left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4\,a\,b} + \frac{B}{x^2}\right)^2}{2a\left(-c - \frac{d}{x} \pm \sqrt{c^2 - 4ab}.\left[1 + \frac{cd-2ae}{(c^2-4ab)x} + \frac{A}{x^2} + \ldots\right]\right)} + \frac{C}{x^2} + \ldots\right]$$

Entwickeln wir den zweiten Factor der rechten Seite nach Potenzen von $\frac{1}{x}$, so erhalten wir

$$\frac{d^2 Y}{d X^2} = \frac{1}{\sqrt{y}}\left[\left(-\frac{d}{2\,a} + \frac{c\,d - 2\,a\,e}{2\,a\sqrt{c^2 - 4\,a\,b}}\right)\frac{1}{x} + \frac{D}{x^2} + \ldots\right].$$

Hieraus folgt, daß, wenn dem Theile des Kegelschnittes, für welchen

$$y = \frac{-c\,x - d + \sqrt{(c^2 - 4\,a\,b)\,x^2 + 2\,(c\,d - 2\,a\,e)\,x + d^2 - 4\,a\,f}}{2\,a},$$

ein unendlicher Zweig der Kurve entspricht, dieser von einem bestimmten Punkte an immer concav gegen die Abscissenaxe ist, wenn

$$-\frac{d}{2\,a} + \frac{c\,d - 2\,a\,e}{2\,a\sqrt{c^2 - 4\,a\,b}} < o; \text{ immer convex, wenn}$$

$$-\frac{d}{2\,a} + \frac{c\,d - 2\,a\,e}{2\,a\sqrt{c^2 - 4\,a\,b}} > o.$$

Entspricht aber dem Theile des Kegelschnittes, für welchen $y = \frac{-cx - d - \sqrt{\ldots}}{2a}$, ein unendlicher Kurvenzweig, so ist dieser von einem bestimmten Punkte an immer concav gegen die Abscissenaxe, wenn $-\frac{d}{2a} - \frac{cd - 2ac}{2a\sqrt{c^2 - 4ab}} < 0$; immer convex, wenn $-\frac{d}{2a} + \frac{cd - 2ae}{2a\sqrt{c^2 - 4ab}} > 0$.

Der Ausdruck $-\frac{d}{2a} \pm \frac{cd - 2ae}{2a\sqrt{c^2 - 4ab}}$ läßt sich leicht geometrisch deuten. Es ist $\lim \frac{y}{x}$ (für $x = \infty$) $= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$.

Die beiden Werthe von $\lim \frac{y}{x}$ sind aber gleich den Tangenten der Winkel, welche die Asymptoten der Hyperbel mit der Abscissenaxe bilden. Die Asymptoten gehen aber auch durch den Mittelpunkt, dessen Ordinate $-\frac{ce - 2bd}{c^2 - 4ab}$, dessen Abscisse $-\frac{cd - 2ae}{c^2 - 4ab}$ ist. (Salmon, conics, Art. 140). Daher sind die Gleichungen der Asymtoten:

$$y + \frac{ce - 2bd}{c^2 - 4ab} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\left(x + \frac{cd - 2ae}{c^2 - 4ab}\right)$$

$$\text{oder } y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\, x - \frac{d}{2a} \pm \frac{cd - 2ae}{2a\sqrt{c^2 - 4ab}}$$

(Das positive Zeichen der Wurzeln gilt, wie man leicht sieht, für die Asymptote des Hyperbelzweigs, für welchen $x = \frac{-cx - d + \sqrt{\ldots\ldots}}{2a}$; das negative für die Asymptote des Hyperbelzweigs, für welchen $y = \frac{-cx - d - \sqrt{\quad}}{2a}$). $-\frac{d}{2a} \pm \frac{cd - 2ae}{2a\sqrt{c^2 - 4ab}}$ sind daher die Ordinaten der Schnittpunkte der Asymtoten mit der Abscissenaxe. Hieraus und aus dem vorhin Entwickelten folgt die in 2 ausgesprochene Behauptung.

3) Wir wollen jetzt untersuchen, wann die unendlichen Zweige der Kurve Asymptoten haben.

A) Der Kegelschnitt sei eine Hyperbel, und die Asymptote, welche zu demjenigen Theil der Hyperbel gehört, welcher dem in Rede stehenden Zweige der Kurve entspricht, sei nicht parallel oder zusammenfallend mit einer Coordinatenaxe.

Man findet nach bekannten Methoden, daß, wenn für den zu untersuchenden Theil der Kurve

$$Y^2 = \frac{-cX^2 - d + \sqrt{(c^2 - 4ab)X^4 + 2(cd - 2ae)X^2 + d^2 - 4af}}{2a},$$

die durch den Anfangspunkt gehenden Linien

$$y = \pm \sqrt{\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}} \cdot x$$

seine Asymptoten sind; ist aber

$$Y^2 = \frac{-cX^2 - d - \sqrt{(c^2 - 4ab)X^4 + 2(cd - 2ae)X^2 + d^2 - 4af}}{2a},$$

so sind die Asymptoten

$$y = \pm \sqrt{\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}} \cdot x$$

B) Der Kegelschnitt sei eine Hyperbel, und die Asymptote, die zu demjenigen Theil der Hyperbel gehört, welcher dem in Rede stehenden unendlichen Kurvenzweige entspricht, sei mit einer der Coordinatenaxen parallel.

Ist die Gleichung der genannten Hyperbelasymptote $y = n$, so haben die entsprechenden Kurvenzweige, wie man leicht sieht, die Asymptoten $y = \pm \sqrt{n}$.

Ist die Gleichung der Hyperbelasymptote $x = n$, so haben die entsprechenden Kurvenzweige die Asymptoten $x = \pm \sqrt{n}$.

C) Der Kegelschnitt sei eine Parabel.

I. Die Kurve gehöre zur 2. Hauptabtheilung. Die Axe der Parabel muß dann mit einer der Coordinatenaxen parallel sein, oder zusammenfallen.*) Ist nun die Axe der Parabel der Ordinatenaxe parallel, so ist die Gleichung der Parabel

$(x + \gamma)^2 = p(y + \beta)$, also ist $\frac{dy}{dx} = \frac{2(x + \gamma)}{p}$, $\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{px}{(x + \gamma)^2 - p\beta}}$,

$$\text{also } \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = 2\sqrt{\frac{x(x + \gamma)^2}{p[(x + \gamma)^2 - p\beta]}}.$$

Diese Größe wächst in's Unendliche, wenn X, also auch x, in's Unendliche wächst. Hat aber eine Kurve eine Asymptote, so muß sich der Differentialquotient der Ordinaten der Kurve mit wachsender Abscisse immer mehr und mehr einer bestimmten Grenze nähern (nämlich der Tangente des Winkels, welchen die Asymptote mit der Abscissenaxe bildet), oder die Abscisse wird für eine endliche Ordinate, oder die Ordinate für eine endliche Abscisse unendlich. Von diesen Bedingungen ist hier keine erfüllt, denn der Differentialquotient der Ordinaten der Kurve wächst in's Unendliche, wenn die Abscisse in's Unendliche wächst, und da die Gleichung der Kurve ist $(X^2 + \gamma)^2 = p(Y^2 + \beta)$, so kann nicht die Ordinate für eine endliche Abscisse, oder die Abscisse für eine endliche Ordinate unendlich werden. Die Kurve hat also keine Asymptote.

*) Dies folgt leicht daraus, daß eine grade Linie, welche nicht der Parabelaxe parallel ist, die Parabel gar nicht, oder in 2 reellen Punkten schneidet. (Salmon, conics, Art. 137.)

Hieraus folgt durch Vertauschung der Coordinatenaxen, daß auch dann, wenn die Parabelaxe der Abscissenaxe parallel ist, die Kurve keine Asymptote hat.

II. Die Kurve gehöre zur 3. Hauptabtheilung. Einem unendlichen Parabelzweige entsprechen dann 4 Kurvenzweige mit parallelen Asymptoten.

Beweis. Man verlängere oder verkürze sämmtliche Ordinaten der Parabel um so viel, daß sie die Abscissenaxe berührt, die Abscissen um so viel, daß sie die Ordinatenaxe berührt.

Es ist dann $c^2 = 4ab$, $d^2 = 4af$, $e^2 = 4bf$. Wenn wir diese 3 Gleichungen multipliciren und aus dem Product die Wurzel ziehen, so erhalten wir $cde = \pm 8abf$, und wenn wir diese Gleichung nach einander durch die 3 vorhergehenden theilen, so entsteht $f = \pm \frac{de}{2c}$, $b = \pm \frac{ce}{2d}$, $a = \pm \frac{cd}{2e}$. Die Gleichung der Parabel ist also

$$\pm \frac{cd}{2e} y^2 \pm \frac{ce}{2d} x^2 + cyx + dy + ex \pm \frac{de}{2c} = 0,$$

d. i. $$\frac{cd}{2e} y^2 + \frac{ce}{2d} x^2 + cyx + dy + ex + \frac{de}{2c} = 0,$$

oder $$\frac{cd}{2e} y^2 + \frac{ce}{2d} x^2 - cyx - dy - ex + \frac{de}{2c} = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen ist aber $\left(y + \frac{c}{d} x + \frac{e}{c}\right)^2 = 0$; sie stellt also 2 zusammenfallende grade Linien dar und kann nicht die Gleichung unserer Parabel sein. Die Gleichung der Kurve ist also $\frac{cd}{2e} Y^4 + \frac{ce}{2d} X^4 - cY^2X^2 - dY^2 - eX^2 + \frac{de}{2c} = 0$, oder

$$\left(Y - X\sqrt{\frac{e}{d}} - \sqrt{\frac{e}{c}}\right)\left(Y - X\sqrt{\frac{e}{d}} + \sqrt{\frac{e}{c}}\right)$$
$$\left(Y + X\sqrt{\frac{e}{d}} - \sqrt{\frac{e}{c}}\right)\left(Y + X\sqrt{\frac{e}{d}} + \sqrt{\frac{e}{c}}\right) = 0.$$

Die Kurve besteht also aus 4 graden Linien, welche ein Parallelogramm bilden. Sind nun y und x die Coordinaten der beide Axen berührenden Parabel, so sind die Coordinaten der ursprünglichen Parabel $y + m$ und $x + n$. Da nun aber mit wachsendem y und x die Punkte $\sqrt{y + m}$, $\sqrt{x + n}$ und $\sqrt{y}$, $\sqrt{x}$, sich immer mehr und mehr nähern, so muß die Kurve, welche der ursprünglichen Parabel entspricht, sich, wenn die Abscissen wachsen, immer mehr und mehr der Kurve nähern, welche der Parabel mit den veränderten Coordinaten entspricht. Da nun die letztere Kurve aus 4 ein Parallelogramm bildenden graden Linien besteht, so sind diese Asymptote an der ursprünglichen Kurve.

§. 6. **Wir wollen nun die unendlichen Zweige der Kurven der 2. Hauptabtheilung näher untersuchen.**

A) Der Kegelschnitt sei eine Hyperbel, und die Asymptote, welche zu demjenigen Theil der Hyperbel gehört, der dem in Rede stehenden unendlichen Kurvenzweige entspricht, sei nicht parallel oder zusammenfallend mit einer der Coordinatenaxen.

Wir wollen annehmen, daß der in Rede stehende Hyperbelzweig von einem bestimmten Punkte an bis ins Unendliche concav gegen die Abscissenaxe sei, was man, wenn es nicht der Fall ist, durch Vertauschung der Coordinatenaxen erreichen kann.

1. Beide Hyperbeläste schneiden die Ordinatenaxe nicht, oder der, welchem die in Rede stehenden Kurvenzweige entsprechen, schneidet die Ordinatenaxe nicht, der andere zweimal.

In diesen beiden Fällen kann die Kurve keinen endlichen reellen Undulationspunkt haben, für den nicht $y = o$ oder $x = o$ ist. Denn schneiden beide Hyperbeläste die Ordinatenaxe nicht, liegt also der eine Hyperbelast ganz auf der einen, der andere ganz auf der andern Seite derselben, so hat von den Tangenten, die man parallel der Ordinatenaxe an die Hyperbel ziehen kann, die eine eine positive, die andere eine negative Abscisse, die Wurzel aus dem Product dieser Abscissen ist also imaginär und die Kurve kann keinen endlichen reellen Undulationspunkt haben, für den nicht $x = o$ oder $y = o$ (§. 5, 1). Schneidet aber der Hyperbelast, welchem die in Rede stehenden Kurvenzweige entsprechen, die Ordinatenaxe nicht, der andere zweimal, so haben die Tangenten, welche man parallel der Ordinatenaxe an die Hyperbel ziehen kann, beide positive Abscissen; zu der Abscisse, welche zwischen beiden das geometrische Mittel ist, die also zwischen ihnen liegt, gehört aber kein reeller Punkt der Hyperbel, also kann auch jetzt die Kurve keinen Undulationspunkt von der verlangten Beschaffenheit haben.

Wir wollen nun, wenn die Asymptote des Hyperbelzweigs, dem die unendlichen Kurvenzweige entsprechen, die Ordinatenaxe in einem Punkte mit positiver Ordinate schneidet, (Fig. 12), sämmtliche Ordinaten des Kegelschnittes um so viel verkürzen, daß die Ordinate des Schnittpunktes der Asymptote mit der Ordinatenaxe negativ wird. Dann entspricht demjenigen Theil des Hyperbelzweiges, welcher von einem bestimmten Punkte P bis ins Unendliche geht, ein Theil der Kurve, welcher stets concav gegen die Abscissenaxe ist. (§. 5, 2.) Man verkürze nun die Ordinaten des Kegelschnittes um so viel, daß der Punkt P eine negative Ordinate erhält (Fig. 15.*) Jetzt sind die unendlichen Kurvenzweige in allen ihren Theilen concav gegen die Abscissenaxe (dies folgt ähnlich wie §. 2, 10.) Man verlängere nun die Ordinaten des Kegelschnittes um das Stück n, welches von o bis ∞ stetig wachse. Es sei A (Fig. 15) der Punkt des in Rede stehenden Hyperbelastes,

*) Daß die Hyperbeln in Fig. 12, 15 u. s. w. nicht congruent und zu der Ordinatenaxe gleichliegend gezeichnet sind, kann, wie ich glaube, das Verständniß nicht erschweren.

für welchen die Abscissen ihr Minimum erreichen, B der Schnittpunkt der Asymptote mit der Ordinatenaxe, C sei immer der Schnittpunkt des Hyperbelzweiges mit der Abscissenaxe. So lange B auf der negativen Ordinatenaxe, A im 4. Quadranten liegt, haben die unendlichen Kurvenzweige keinen Inflexionspunkt, denn sie sind immer von einem bestimmten Punkte an concav gegen die Abscissenaxe (§. 5, 2) und haben noch keinen endlichen reellen Undulationspunkt erreicht. Wenn nun beim Wachsen der Kegelschnittsordinaten der Punkt A in den 1. Quadranten, B aber noch nicht in die positve Seite der Abscissenaxe gerückt ist, (Fig. 13) so entspricht dem Theil C A des Kegelschnitts ein Theil der Kurve mit einem Inflexionspunkte (was ähnlich, wie §. 2, 8, folgt); dem Theile des Kegelschnittes, welcher von A bis ins Unendliche geht, entspricht noch immer ein Theil der Kurve, welcher concav gegen die Abscissenaxe ist (denn dieser Theil der Kurve ist noch immer von einem bestimmten Punkte an concav und hat noch keinen Undulationspunkt erreicht.) Wenn A noch nicht im 1. Quadranten liegt, die Ordinate von B aber positiv ist (Fig 14), so sieht man leicht, daß der unendliche Kurvenzweig im 1. Quadranten anfangs concav, dann, nachdem ein Inflexionspunkt eingetreten ist, convex gegen die Abscissenaxe ist. Liegt aber (Fig. 12) A im ersten Quadranten, B in der positiven Ordinatenaxe, so entspricht sowohl C A, als auch demjenigen Theil der Hyperbel, welcher von A bis ins Unendliche geht, im 1. Quadranten ein Theil der Kurve mit einem Inflexionspunkte.

II. Der Hyperlast, welchem die unendlichen Kurvenzweige entsprechen, schneidet die Ordinatenaxe.

Mann kann wieder, wie in I., die Ordinaten des Kegelschnittes um so viel verkürzen, daß die Asymptote desjenigen Hyperbelzweigs, welchem die unendlichen Kurvenzweige entsprechen, die Ordinatenaxe in einem Punkte mit negativer Ordinate schneidet und daß die Kurve überall concav gegen die Abscissenaxe ist. Es ergeben sich nun folgende Sätze:

1) Wenn man die Ordinaten des Kegelschnittes wieder wachsen läßt, so kann, so lange der Schnittpunkt der Asymptote mit der Ordinatenaxe eine negative Ordinate hat, die Kurve keinen Undulationspunkt haben.

Beweis. Es sei D (Fig. 16) der Schnittpunkt der Hyperbelasymptoten, B der Schnittpunkt desjenigen Hyperbelzweiges, welchem die unendlichen Kurvenzweige entsprechen, mit der Ordinatenaxe. D muß nothwendig im 2. oder 3. Quadranten liegen, denn sonst würde, wie man leicht sieht, der eine Hyperbelast ganz im 1. und 4. Quadranten liegen,*) welchen Fall wir schon in I. hatten; D kann aber arch, da die Ordinate von B negativ sein soll, nicht im 2. Quadranten liegen, denn dann würde die Asymptote B G, also auch der zugehörige unendliche

*) Immer noch unter der Voraussetzung, welche wir am Anfange dieses §. machten, daß der Hyperbelzweig, welchem die unendlichen Kurvenzweige entsprechen, von einem bestimmten Punkte bis ins Unendliche concav gegen die Abscissenaxe sei, daß also in Fig. 16 die Hyperbel in den Winkeln G D K und I D H liege.

Hyperbelzweig sich nicht im 1. Quadranten ins Unendliche erstrecken. D liegt also im 3. Quadranten. Die Abscissen der Tangenten, welche man parallel mit der Ordinatenaxe an den Kegelschnitt ziehen kann, sind die Wurzeln der Gleichung
$(c^2 - 4ab)x^2 + 2(cd - 2ae)x + d^2 - 4af = o$, und da diese Abscissen, wie man leicht sieht, reell und zwar negativ sind, so folgt, daß ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\frac{cd - 2ae}{c^2 - 4ab} > \sqrt{\frac{d^2 - 4af}{c^2 - 4ab}}.$$

Auf dieselbe Weise folgt, da die Tangenten, welche man parallel der Abscissenaxe an die Kurve ziehen kann, beide imaginär sind, daß ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\frac{ce - 2bd}{c^2 - 4ab} < \sqrt{\frac{e^2 - 4bf}{c^2 - 4ab}}$$

$-\frac{ce - 2bd}{c^2 - 4ab}$ ist aber die Ordinate, $-\frac{cd - 2ae}{c^2 - 4ab}$ die Abscisse von D (Salmon, conicsections, Art. 140); construirt man daher den Punkt **L**, dessen Ordinate $-\sqrt{\frac{e^2 - 4bf}{c^2 - 4ab}}$, dessen Abscisse $-\sqrt{\frac{d^2 - 4af}{c^2 - 4ab}}$ ist, so liegt er näher an der Ordinatenaxe, aber weiter entfernt von der Abscissenaxe, als **D**; es liegen daher **L** und der Anfangspunkt **O** auf entgegengesetzten Seiten der Asymptote **D G** (deren Ordinaten mit den Abscissen wachsen) und **O L** schneidet **D G** (**O L** selbst, nicht die Verlängerung von **O L**;) daher kann die Verlängerung von **L O** über **O** hinaus die Asymptote **D G** nicht schneiden, also kann sie die Hyperbel gewiß nicht schneiden, (denn **O** und derjenige Hyperbelast, welcher sich in den 1. Quadranten erstreckt, liegen auf entgegengesetzten Seiten von **D G**, was aus der zu Anfang dieses §. gemachten Annahme folgt). Nimmt man daher auf der Verlängerung von **L O** einen Punkt **L'** an, so daß **O L' = O L**, so kann **L'** nicht in der Hyperbel liegen. Da nun die Coordinaten von **L'** die entgegengesetzten Werthe der Coordinaten von **L**, also die Werthe $+\sqrt{\frac{e^2 - 4bf}{c^2 - 4ab}}$ und $+\sqrt{\frac{d^2 - 4af}{c^2 - 4ab}}$ haben, der Punkt, der diese Coordinaten hat, aber in der Hyperbel liegen muß, wenn die Kurve einen endlichen reellen Undulationspunkt hat, für den nicht $x = o$ oder $y = o$ (§. 2, 12): so kann die Kurve nicht einen solchen Undulationspunkt haben.

2) Auch wenn die Asymptote des Hyperbelzweiges, welchem die unendlichen Kurvenzweige entsprechen, die Ordinatenaxe in einem Punkte mit positiver Ordinate schneidet, die Schnittpunkte dieses Hyperbelzweiges mit der Ordinatenaxe aber beide negative Ordinaten haben, kann die Kurve keinen endlichen reellen Undulationspunkt haben.

Beweis. Man verkürze sämmtliche Ordinaten des Kegelschnittes um so viel, daß die ganze Kurve concav gegen die Abscissenaxe wird. Läßt man nun die Ordinaten wieder wachsen, so ist die Kurve, so lange

der Schnittpunkt der Asymptote mit der Ordinatenaxe eine negative Ordinate hat, überall concav gegen die Abscissenaxe (weil nach 1. kein Undulationspunkt eingetreten sein kann und die Kurve von einem bestimmten Punkte an concav ist); sobald die Ordinate jenes Punktes positiv geworden ist, aber der Hyperbelzweig noch die positive Abscissenaxe schneidet und noch kein endlicher Undulationspunkt stattgefunden hat,*) ist der unendliche Kurvenzweig, welcher sich im 1. Quadranten befindet, von seinem Schnittpunkte γ mit der Abscissenaxe bis zu einem Punkte $\varkappa$ (Fig. 17) concav, von $\varkappa$ bis in's Unendliche convex gegen die Abscissenaxe. Dem Punkt $\varkappa$ entspreche der Punkt K des Kegelschnittes. Ich lasse nun die Ordinaten des Kegelschnittes noch weiter wachsen und nehme an, die Kurve erreiche einen Undulationspunkt, während der Schnittpunkt des Hyperbelzweiges mit der Abscissenaxe noch eine positive Abscisse hat. Wenn nun die Ordinaten des Kegelschnittes wieder um eine auch noch so kleine Größe wachsen, muß der unendliche Kurvenzweig im 1. Quadranten 3 Inflexionspunkte haben,**) und zwar von seinem Schnittpunkte γ mit der Abscissenaxe bis zum 1. Inflexionspunkt α concav, von α bis β convex, von β bis $\varkappa$ concav, von $\varkappa$ bis in's Unendliche convex gegen die Abscissenaxe sein. Ich lasse nun noch die Ordinaten des Kegelschnittes um so viel wachsen, daß der Hyperbelzweig, also auch der unendliche Kurvenzweig, durch den Anfangspunkt O geht. Es kann jetzt die Abscisse des Inflexionspunktes β nicht kleiner, die von $\varkappa$ nicht größer geworden sein (dies folgt aus §. 2, 2, ähnlich wie §. 2, 10); β und $\varkappa$ können aber nicht zusammengefallen und verschwunden sein, denn es hat nicht zum 2. Male ein Undulationspunkt stattfinden können (vergl. Seite 19, Zeile 5); der Inflexionspunkt α dagegen kann immer näher und näher an γ gerückt sein, so daß er jetzt mit O zusammenfällt (bevor die Kurve durch O ging, konnte α nicht mit γ zusammenfallen, denn dann wäre die Kurve von γ bis β convex gegen die Abscissenaxe gewesen, was gegen §. 2, 6, streitet), und die Kurve von O bis β convex gegen die Abscissenaxe ist, oder die Kurve ist noch von O bis α concav gegen die Abscissenaxe (Fig. 20).

a) Die Kurve sei von O bis zu einem Inflexionspunkte α concav gegen die Abscissenaxe (Fig. 20). Legt man bei α eine Tangente an die Kurve, so muß sie die negative Seite der Abscissenaxe schneiden. Diese Tangente muß nämlich unmittelbar vor α auf der Seite des Kurvenzweiges O $\varkappa$ liegen, auf welcher die Abscissenaxe nicht liegt (da vor α die Kurve concav gegen die Abscissenaxe ist); schnitte sie daher die positive Abscissenaxe, so müßte sie noch einmal die Kurve im 1. Quadranten schneiden; sie müßte dann aber auch den Kurvenzweig im

---

*) Daß nämlich die Kurve, wenn die Asymptote des Kegelschnittes durch den Anfangspunkt geht, keinen endlichen reellen Undulationspunkt hat, folgt eben so, wie 1.

** Daß nämlich aus einem Undulationspunkte, wenn die Kegelschnittsordinaten wachsen, 2 Inflexionspunkte entstehen, folgt daraus, daß, wenn für einen Punkt der Kurve $\frac{d^2 Y}{d X^2} - o$, für dieselbe Abscisse in den folgenden Kurven $\frac{d^2 X}{d Y^3} > o$ (vergl. §. 2, 10.)

4. Quadranten schneiden; sie hätte also, da sie bei α 3 zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat, im Ganzen 5 Punkte mit der Kurve gemein. Die Tangente bei α muß also die negative Abscissenaxe schneiden (oder durch O gehen). Die Tangente bei β schneidet (was eben so zu beweisen ist) die positive Abscissenaxe. Es muß daher zwischen α und β eine Tangente geben, welche durch den Anfangspunkt geht (§. 2, 5). Diese muß aber, wenn man sie über O hinaus verlängert, wegen der Symmetrie der Kurve zu den Axen auch im 3. Quadranten die Kurve berühren, also die beiden Berührungspunkte und den Doppelpunkt, d. i. 3 mal 2 zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein haben, was unmöglich ist. Der Fall a) kann also nicht Statt finden.

b) Die Kurve sei von O bis β convex gegen die Abscissenaxe. Die Unmöglichkeit dieses Falles läßt sich eben so beweisen, wie die Unmöglichkeit von a).

Von beiden Fällen folgt aber mit Nothwendigkeit einer aus unserer Voraussetzung, daß die Kurve einen Undulationspunkt erreiche, während der Schnittpunkt des Hyperbelzweiges mit der Abscissenaxe noch eine positive Abscisse hat; diese Annahme muß also falsch sein.

3) Aus dem Beweise von 2) geht hervor, daß, wenn der in Rede stehende Hyperbelzweig die negative, seine Asymptote aber die positive Ordinatenaxe schneidet, der unendliche Kurvenzweig im 1. Quadranten von seinem Schnittpunkte γ mit der Abscissenaxe (Fig. 17) bis zu einem Punkte $\varkappa$ concav, von $\varkappa$ bis in's Unendliche convex gegen die Abscissenaxe ist. Es mögen nun die Ordinaten des Kegelschnittes um so viel wachsen, daß der Hyperbelzweig, also auch die Kurve, durch den Anfangspunkt geht. Es muß dann entweder der Inflexionspunkt $\varkappa$ immer näher an γ gerückt sein, so daß er jetzt mit O zusammenfällt und die Kurve in allen ihren Theilen convex gegen die Abscissenaxe ist, oder die Kurve ist noch von O bis zu einem Punkte $\varkappa$ concav, von $\varkappa$ bis in's Unendliche convex gegen die Abscissenaxe (Fig. 18). Es kann aber nur der letzte dieser beiden Fälle Statt finden, denn wäre die Kurve ganz convex gegen die Abscissenaxe, so würde, wenn man bei O eine Tangente an sie legte und dann den Berührungspunkt sich immer weiter von O entfernen ließe, der Schnittpunkt der Tangente mit der Abscissenaxe sich immer weiter von O entfernen; dieser Punkt muß sich aber zuletzt dem Punkte O nähern, da die Tangente in unendlicher Entfernung, d. i. die Asymptote, durch O geht (§. 5, 3, A). Die Kurve kann also nicht ganz convex gegen die Abscissenaxe sein. Läßt man nun die Ordinaten des Kegelschnittes noch weiter wachsen, so muß, so lange noch kein Undulationspunkt eingetreten ist, jeder der 4 unendlichen Zweige (da die Kurve bei ihrem Schnittpunkte mit der Ordinatenaxe nach §. 2, 6, convex gegen die Abscissenaxe ist) 2 Inflexionspunkte haben (Fig. 19.) Wenn nun bei noch weiterem Wachsen der Kegelschnittsordinaten ein Undulationspunkt eintritt, so geht er bei noch weiterem Wachsen der Kegelschnittsordinaten nicht in 2 Inflexionspunkte über, sondern es verschwinden mit ihm die vorhandenen Inflexionspunkte, denn wenn die Kurve 2 Inflexionspunkte hat und beim Wachsen der Kegelschnittsordinaten ein

Undulationspunkt eintritt, so muß dieser in einem Theile der Kurve liegen, welcher unmittelbar vorher concav gegen die Abscissenaxe war (§. 2, 10.). Wäre daher beim Wachsen der Kegelschnittsordinaten der concave Theil der Kurve nicht immer kleiner und kleiner geworden, so daß er mit dem Undulationspunkte verschwände, so müßte der Undulationspunkt β in einem concaven Theile der Kurve liegen; legte man daher in ihm eine Tangetne an die Kurve, so müßte dieselbe die Kurve in noch einem Punkte schneiden (vgl. 2, a); sie hätte also, (da eine Tangente an einem Undulationspunkt 4 zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat) 5 Punkte mit der Kurve gemein. Mit dem Undulationspunkte verschwinden also die Inflexionspunkte der Kurve, und wenn die Kegelschnittsordinaten noch weiter wachsen, so bleiben die unendlichen Zweige der Kurve überall convex gegen die Abscissenaxe (§. 2, 10.)

B. Der Kegelschnitt sei eine Hyperbel und die Asymptote des Hyperbelzweiges, welchem die unendlichen Kurvenzweige entsprechen, sei parallel oder zusammenfallend mit einer Axe.

Die Axe, mit welcher die Asymptote parallel ist, oder zusammenfällt, sei die Ordinatenaxe.

I. Der unendliche Hyperbelzweig im 1. Quadranten befindet sich zwischen seiner Asymptote und der Ordinatenaxe.

1) Der in Rede stehende Hyperbelzweig schneidet die Abscissenaxe nicht. (Fig. 21 und 22.)
   a) Die Ordinaten des Hyperbelzweiges erreichen im 1. Quadranten kein Minimum (Fig. 21.) Die Kurve ist dann ganz convex gegen die Abscissenaxe. Denn angenommen, sie sei von α bis β concav, so kann dieser concave Theil nicht plötzlich verschwinden, wenn man die Hyperbel um den Anfangspunkt dreht (denn, wenn der Kegelschnitt seine Lage stetig ändert, so ändert auch, wie man leicht sieht, die Kurve sich stetig); dreht man aber die Hyperbel nach der Richtung um den Anfangspunct, daß die anfangs mit der Ordinatenaxe parallele Asymptote sofort die positive Ordinatenaxe schneidet, so geht die Kurve sogleich in eine Kurve der 4. Art der 1. oder 4. Unterabtheilung in der 1. Hauptabtheilung, oder in eine Kurve der 2. Art der 3. Unterabtheilung der 1. Hauptabtheilung über, und hat keinen Inflexionspunkt. Hieraus folgt leicht, daß bei der ursprünglichen Lage des Kegelschnittes kein Theil der Kurve concav gegen die Abscissenaxe sein kann.
   b) Die Ordinaten des Hyperbelzweiges erreichen im 1. Quadranten ein Minimum. Verfährt man, wie in a, so sieht man, daß die Kurve die Gestalt von Fig. 22 hat.
2) Der in Rede stehende Hyperbelzweig schneidet die Abscissenaxe. (Fig. 23.) Der unendliche Kurvenzweig im 1. Quadranten ist anfangs concav, dann convex gegen die Abscissenaxe, was sich eben so, wie die Resultate in 1 beweisen läßt.

II. Der unendliche Hyperbelzweig im 1. Quadranten befindet sich auf der Seite seiner Asymptote, auf welcher die Ordinatenaxe nicht

liegt. Verfährt man ebenso, wie in I., so sieht man, daß jeder unendliche Kurvenzweig anfangs (von seinem Schnittpunkte mit der Abscissenaxe an gerechnet) concav, dann convex gegen die Abscissenaxe ist. (Aehnlich wie in Fig. 24).

C. Der Kegelschnitt sei eine Parabel.

Die Axe der Parabel muß mit einer der Coordinatenaxen parallel sein. (§. 4, 3, C.) Sie sei mit der Abscissenaxe parallel. Wenn man die Parabel nach der Richtung um den Anfangspunkt dreht, daß ihre Axe die positive Abscissenaxe schneidet, so geht die Kurve sofort in eine Kurve der 1. Hauptabtheilung über. Man findet daher, indem man eben so, wie in B verfährt, folgende Resultate:

I. Schneidet die Parabel die positive Ordinatenaxe nicht und erreichen ihre Abscissen im 1. Quadranten kein Minimum, so ist die Kurve überall concav gegen die Abscissenaxe.

II. Schneidet die Parabel die Ordinatenaxe nicht und erreichen ihre Abscissen im 1. Quadranten ein Minimum, so hat der Theil des unendlichen Kurvenzweiges im 1. Quadranten, dessen Ordinaten mit wachsenden Abscissen abnehmen, einen, der andere keinen Inflexionspunkt.

III. Schneidet die Parabel die positive Ordinatenaxe, so ist jeder unendliche Kurvenzweig anfangs convex, dann concav gegen die Abscissenaxe. (Fig. 25.)

§. 7. Aus dem in §. 5, 3 und §. 6 Gesagten ergeben sich unmittelbar die Gestalten der Kurven der 8. und 10. Unterabtheilung der 2. Hauptabtheilung. Die 8. Unterabtheilung zerfällt in folgende Arten von Kurven:

a) Die Kurve hat 2 sich (im Anfangspunkte) schneidende Asymptoten (§. 5, 3, A und §. 6, A.)

1. Art. Die Kurve hat keinen Inflexionspunkt. (§. 6, A, I. und II., Fig. 15 und 16.)

2. Art. Die Kurve hat 4 Inflexionspunkte und ihre Abscissen und Ordinaten erreichen im 1. Quadranten kein Minimum. (§. 6, A, I. und II., Fig. 14 und 17.)

3. Art. Die Kurve hat 4 Inflexionspunkte und ihre Abscissen oder Ordinaten erreichen im 1. Quadranten einmal ein Minimum. (§. 6, A, I., Fig. 13.)

4. Art. Die Kurve hat 8 Inflexionspunkte und ihre Abscissen oder Ordinaten erreichen im 1. Quadranten ein Minimum. (§. 6, A, I., Fig. 12.)

5. Art. Die Kurve hat 8 Inflexionspunkte und ihre Abscissen und Ordinaten erreichen im 1. Quadranten kein Minimum. (§. 6, A, II., Fig. 19.)

b) Die Kurve hat 2 (einer Axe) parallele Asymptoten. (§. 5, 3, B und §. 6, B.)

6. Art. Die Kurve schneidet diejenige Axe, welche ihren Asymptoten parallel ist und hat keinen Inflexionspunkt; (Fig. 21.)

7. Art. Die Kurve schneidet diejenige Axe, welche ihren Asymptoten

parallel ist und hat 4 Inflexionspunkte; ihre Ordinaten oder Abscissen erreichen im 1. Quadranten ein Minimum. (Fig. 22.)

8\. Art. Die Kurve schneidet die ihren Axen parallele Asymptote nicht, liegt zwischen ihren Asymptoten und hat 4 Inflexionspunkte. (Fig. 23.)

9\. Art. Die Kurve liegt außerhalb ihrer Asymptoten und hat 4 Inflexionspunkte, (Die Kurvenzweige in Fig. 23 liegen außerhalb ihrer Asymptoten, statt zwischen denselben.)

c) Die Kurve hat nur eine Asymptote. (§. 6, **B**, **II.**)

10\. Art. Auf jeder Seite der Asymptote liegt ein sich nach 2 Seiten ins Unendliche erstreckender Zug mit 2 Inflexionspunkten. (Fig. 24.)

d) Die Kurve hat keine Asymptote. (§. 5, 3, **C** und §. 6, **C.**)

11\. Art. Die Kurve hat keinen Inflexionspunkt.

12\. Art. Die Kurve hat 4 Inflexionspunkte und ihre Abscissen oder Ordinaten erreichen im 1. Quadranten ein Minimum.

13\. Art. Die Kurve hat 4 Inflexionspunkte und ihre Abscissen oder Ordinaten erreichen im 1. Quadranten kein Minimum. (Fig. 25.)

In der 10. Unterabtheilung giebt es folgende 3 Arten von Kurven:

1\. Art. Die Kurve hat 2 sich (im Anfangspunkte) schneidende Asymptoten und außer dem Doppelpunkte noch 4 reelle Inflexionspunkte. (§. 6, **A**, **II.**, 3, Fig. 18.)

2\. Art. Die Kurve hat 2 parallele Asymptoten und außer dem Doppelpunkte keinen endlichen reellen Inflexionspunkt.

3\. Art. Die Kurve hat keine Asymptote und außer dem Doppelpunkte keinen endlichen reellen Inflexionspunkt.

Daß nämlich die Kurven der 2. u. 3. Art außer dem Doppelpunkte keinen Inflexionspunkt haben, folgt wie die Resultate in §. 6, **B** u. **C.**

Wir kennen jetzt die Gestalten der unendlichen Zweige der Kurven der 2. Hauptabtheilung, ihre Ovale lassen sich eben so untersuchen, wie die der 1. Hauptabtheilung. Es ist daher auch leicht, diejenigen Kurven der 2. Hauptabtheilung zu untersuchen, welche aus unendlichen Zweigen und Ovalen bestehen, und ich halte es nicht für nöthig, mich länger dabei aufzuhalten. Die unendlichen Zweige der Kurven der 3. Hauptabtheilung lassen sich eben so untersuchen, wie die der 2.; nur, wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist, hat die Kurve unendliche Zweige von solcher Beschaffenheit, wie sie sich in der 2. Hauptabtheilung nicht finden. (Vergl. §. 5, 3, **C**, **II.**) Da indessen die Parabel sich nur unendlich wenig von einer Ellipse und von einer Hyperbel unterscheidet, so ergiebt sich auch in diesem Falle die Gestalt der Kurve sehr leicht (vergl. §. 6, **B** und **C.**) Auch die Kurven der 3. Hauptabtheilung bieten daher keine Schwierigkeiten mehr dar. Wenn man die Kurvenarten zählt, welche es in allen 3 Hauptabtheilungen giebt und diejenigen wegläßt, welche immer aus 2 Kegelschnitten bestehen, so findet man, daß es in der 1. Hauptabtheilung 29, in der 2. 50, in der 3. 61, im Ganzen also 140 Arten giebt. Weit größer würde diese Anzahl werden, wenn wir die Kurven mit Undulationspunkten als besondere Arten rechneten.

*) Wenn in den Figuren, auf welche hier verwiesen ist, die Kurve Ovale hat, so wird es immer leicht sein, die Lage des Kegelschnittes so zu ändern, daß die Ovale wegfallen und die unendlichen Zweige dieselbe Gestalt behalten.

Schnellpressendruck von Fr. F. Geppert in Malchin.

emerkung: Die punktirten Linien bezeichnen den zu der Kurve gehörigen Kegelschnitt u. seine Asymptoten.

Fig.1.

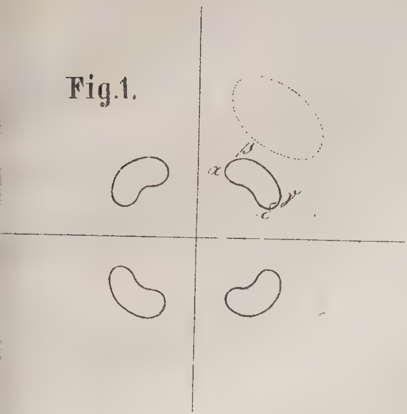


Fig.2.

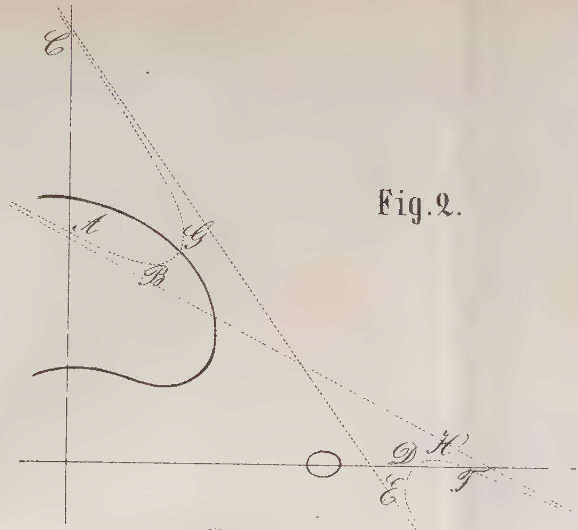


Fig.3.

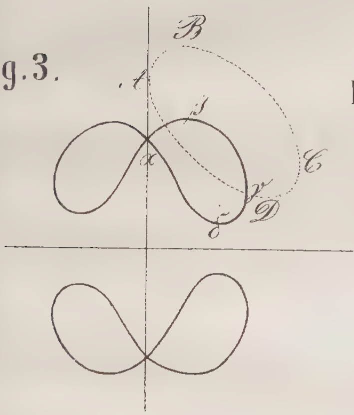


Fig.4.

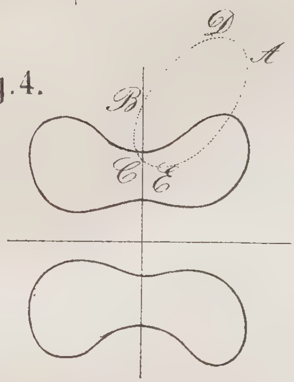


Fig.5.

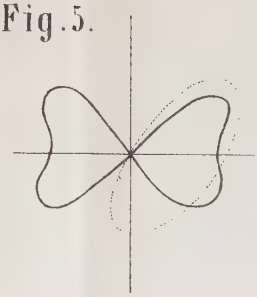


Fig.6.

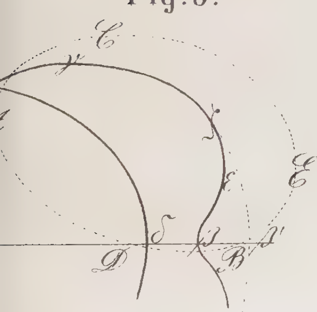


Fig.7.

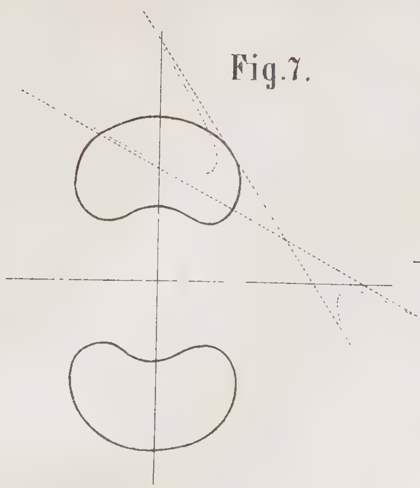


Fig.8.

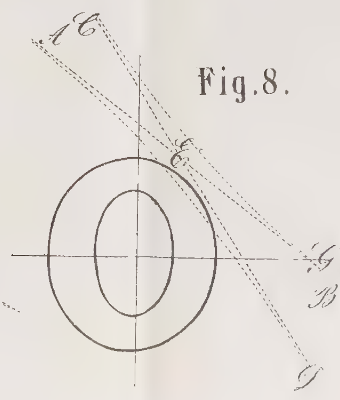


Fig. 9.

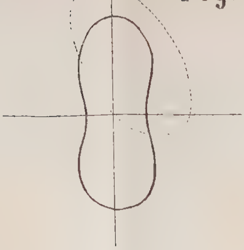


Fig. 10.

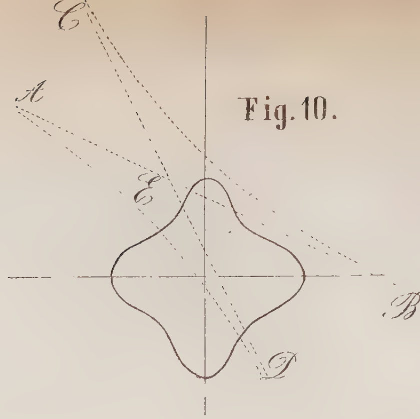


Fig. 11.

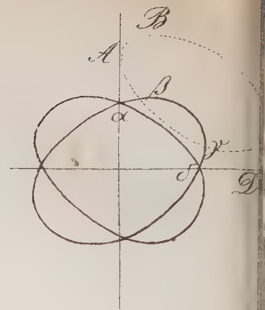


Fig. 12.

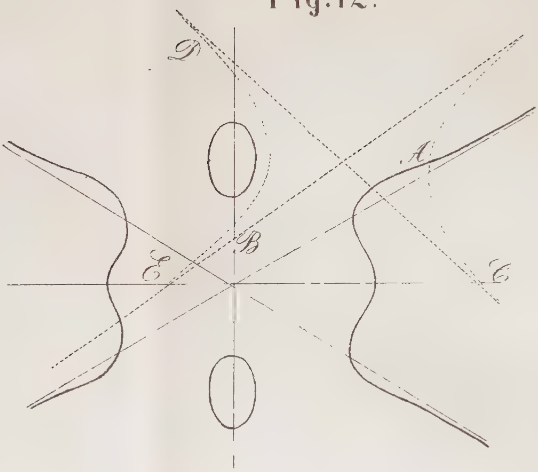


Fig. 13.

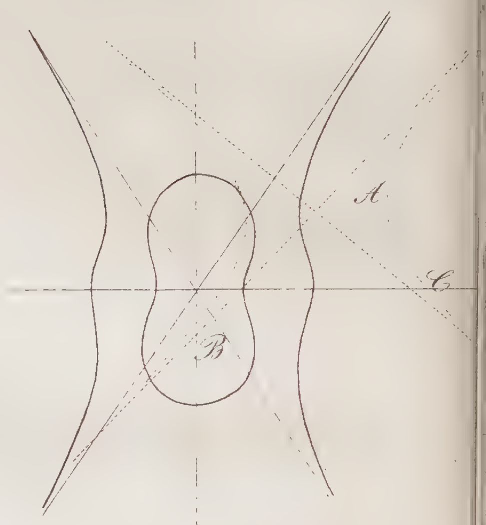


Fig. 14.

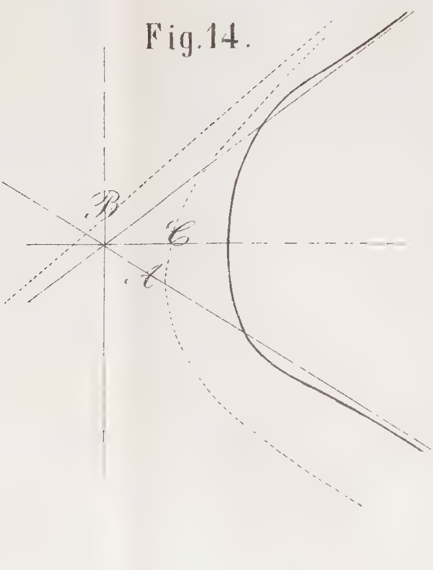


Fig. 15.

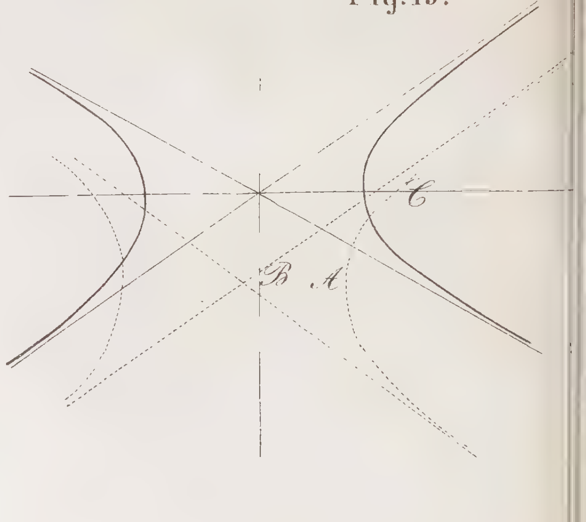


Fig.16.

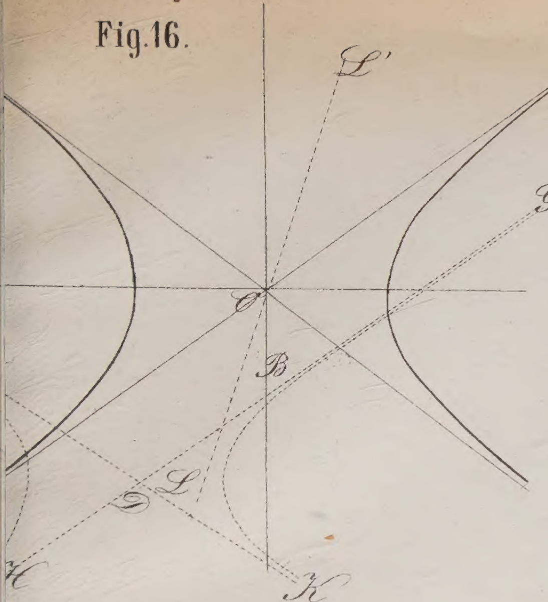


Fig.17.

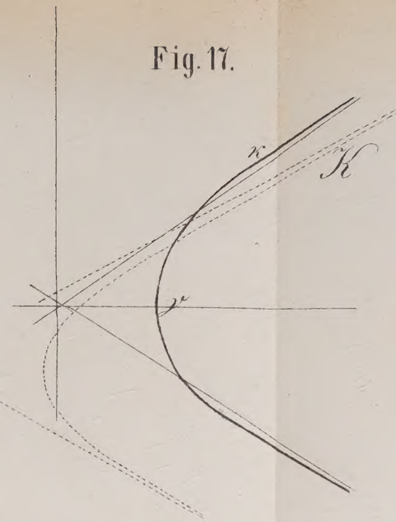


Fig.18.

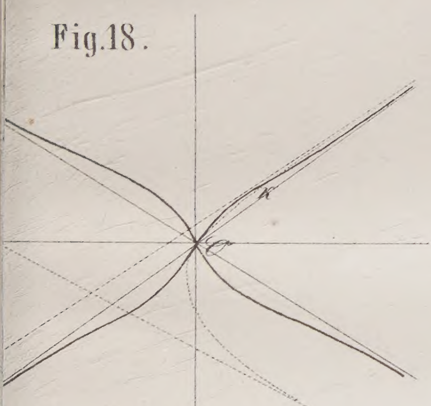


Fig.19.

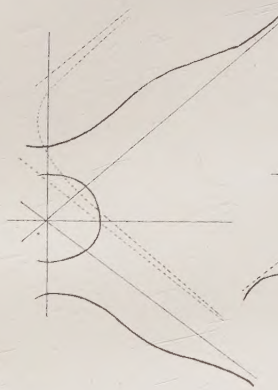


Fig.20.

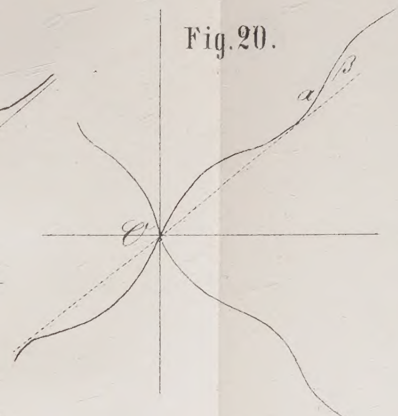


Fig.21.

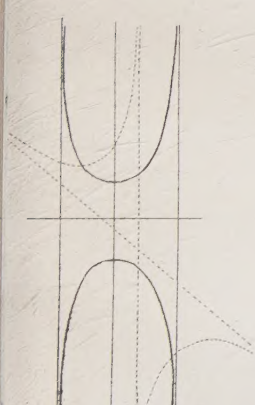


Fig.22.

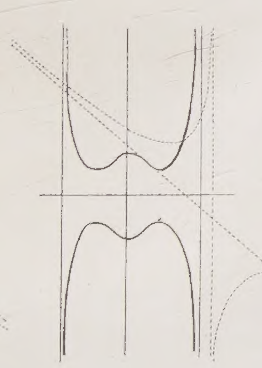


Fig.23.

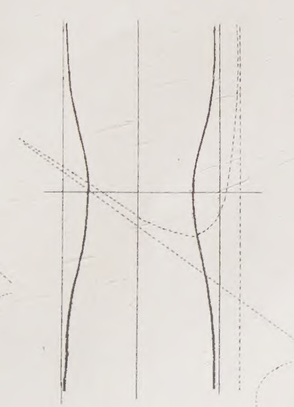


Fig.24.

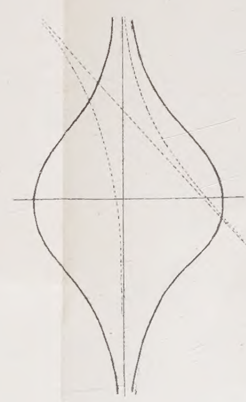


Fig. 25.

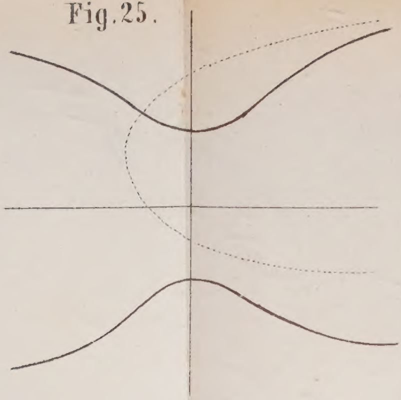


Fig. 26

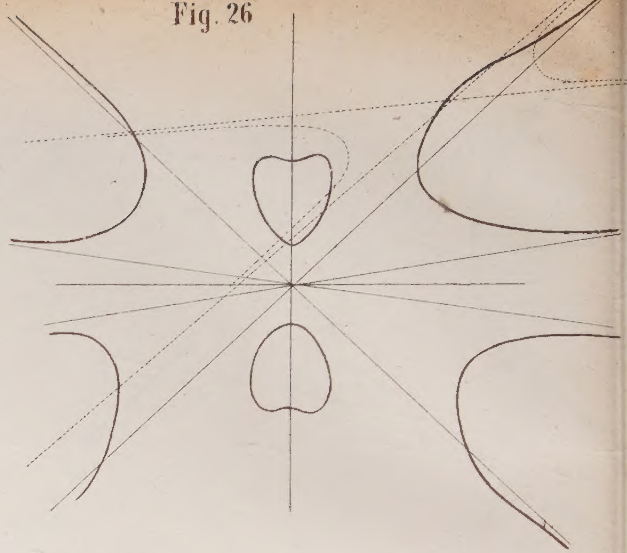


Fig 27

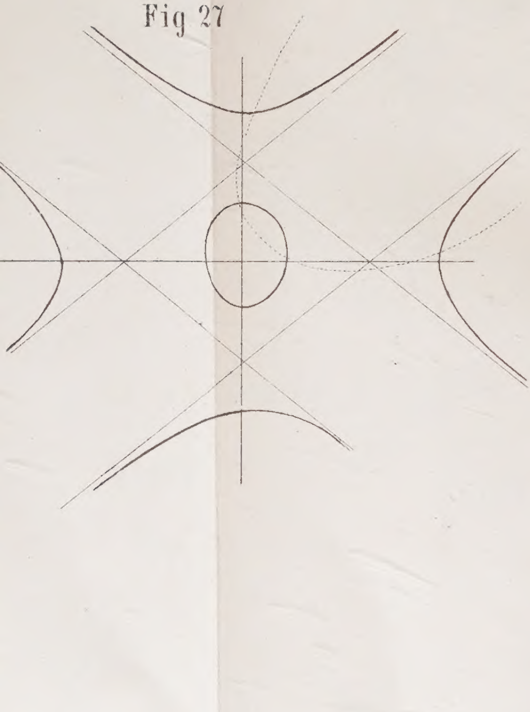


Fig. 28.

